۱-۷

G1

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s(s+1)} & -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

(الف)

$$y_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}u_1(s) - \frac{1}{s+1}u_2(s) \quad , \quad u_2 = k_2(r_2 - y_2)$$

$$\rightarrow \ s(s+1)y_2 = u_1(s) - su_2(s) = u_1(s) - sk_2(r_2 - y_2)$$

$$\rightarrow \ y_2(s) = \frac{1}{s(s+1-k_2)}u_1(s) - \frac{k_2}{s+1-k_2}r_2(s)$$

پایداری:

$$1 - k_2 > 0 \rightarrow \ k_2 < 1$$

ورودی مرجع را به ازای هیچ مقدار $k2$ نمی تواند بدون خطا دنبال کند.

(ب)

$$y_1(s) = \frac{1}{s+1}u_1(s) + \frac{1}{s+1}u_2(s) \quad , \quad u_1 = k_1(r_1 - y_1) \quad , \quad u_2 = k_2\left(\frac{-1}{s(s+1-k_2)}u_1 + \frac{s+1}{s+1-k_2}r_2\right)$$

$$\rightarrow \ (s+1)y_1 = u_1 + u_2 = \left(1 - \frac{k_2}{s(s+1-k_2)}\right)u_1 + \frac{k_2(s+1)}{s+1-k_2}r_2$$

$$\rightarrow s(s+1-k_2)(s+1)y_1 = (s^2 + s(1-k_2) - k_2)k_1(r_1 - y_1) + k_2 s(s+1)r_2$$

$$\rightarrow \ y_1 = \frac{k_1(s^2 + s(1-k_2) - k_2)}{s^3 + s^2(2+k_1-k_2) + s(1-k_2)(1+k_1) - k_1k_2}r_1 + \frac{k_2 s(s+1)}{s^3 + s^2(2+k_1-k_2) + s(1-k_2)(1+k_1) - k_1k_2}r_2$$

پایداری:

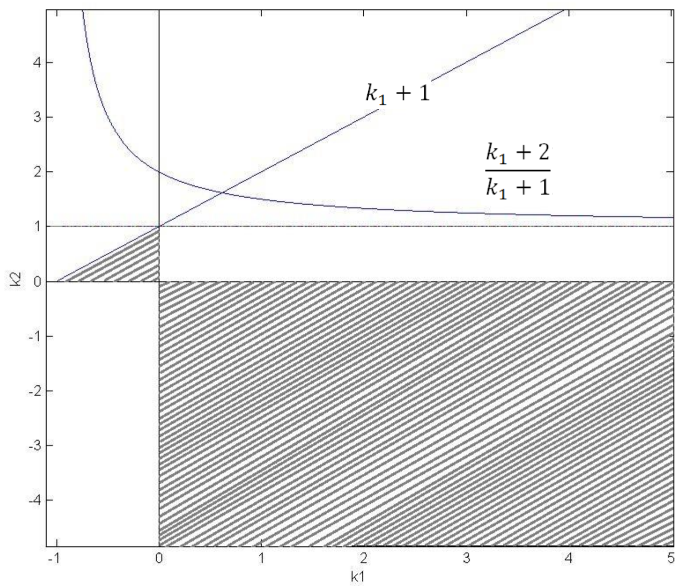
HW 6&7 Solution

$2+k_1-k_2>0\,,(1-k_2)(1+k_1)>0\,,-k_1k_2>0\;,\;\;(2+k_1-k_2)(1-k_2)(1+k_1)+k_1k_2>0$

$\rightarrow\;k_1>-1\;\;,\;\;k_2<1\;\;,\;\;k_1k_2<0\;\;,\;\;k_2^2(1+k_1)-k_2(k_1^2+3k_1+3)+(k_1^2+3k_1+2)>0$

$\rightarrow \Delta= k_1^4+2k_1^3-k_1^2-2k_1+1=(k_1^2+k_1-1)^2>0 \rightarrow\;(k_2-k_1-1)\left(k_2-\dfrac{k_1+2}{k_1+1}\right)>0$

ورودی مرجع را بدون خطا ردیابی می کند.

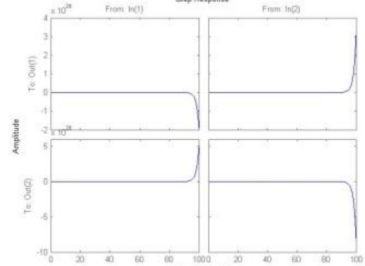


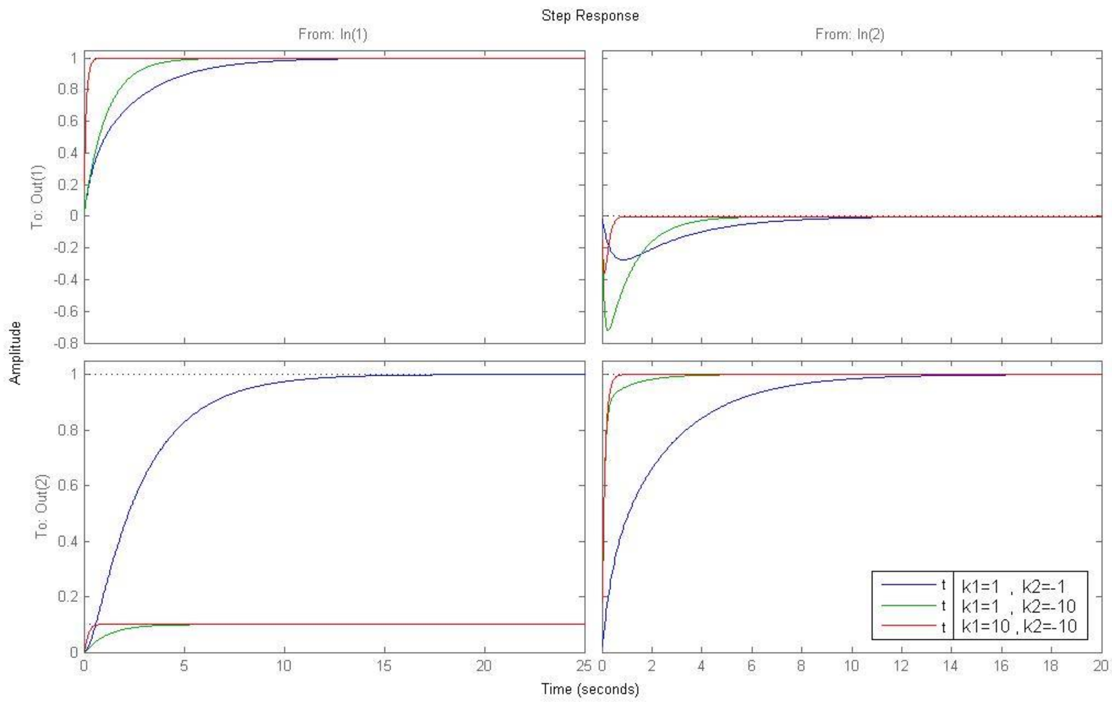
$Y(s)=T(s)R(s)$

$$T(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{k_1(s^2+s(1-k_2)-k_2)}{s^3+s^2(2+k_1-k_2)+s(1-k_2)(1+k_1)-k_1k_2} & \dfrac{k_2s(s+1)}{s^3+s^2(2+k_1-k_2)+s(1-k_2)(1+k_1)-k_1k_2}\\ \dfrac{k_1\left(s^2+s(2-k_2)+(1-k_2)\right)}{(s+1-k_2)(s^3+s^2(2+k_1-k_2)+s(1-k_2)(1+k_1)-k_1k_2)} & \dfrac{-k_2(s^3+s^2(2+k_1-k_2)+s(1+2k_1-k_2-k_1k_2)+k_1(1-k_2))}{(s+1-k_2)(s^3+s^2(2+k_1-k_2)+s(1-k_2)(1+k_1)-k_1k_2)}\end{bmatrix}$$

$K=\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}$:

$k_1=k_2=1$:





به ازای k_2 های کوچکتر (اندازه بزرگتر) تداخل کمتری در کانال دوم رخ می دهد و همچنین به ازای k_1 های بزرگتر پاسخ بهتری مشاهده می شود.

G2 خانم کشاورز

۱.آ

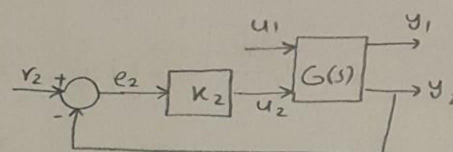
$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

سیستم صفر ناحیه سمت راست ندارد و در نتیجه نیازی به جبران سازی نداریم.

← روش حلقه بستن ترتیبی

الف) بستن حلقه دوم:

$$y_2 = \frac{1}{s+2} u_1 + \frac{1}{s+2} u_2 \qquad (1)$$



$$u_2 = K_2 (r_2 - y_2)$$

$$\rightarrow y_2 = \frac{1}{s+2} u_1 + \frac{K_2}{s+2} (r_2 - y_2)$$

$$\rightsquigarrow \frac{s+2+K_2}{s+2} y_2 = \frac{1}{s+2} u_1 + \frac{K_2}{s+2} r_2 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{s+2+K_2} u_1 + \frac{K_2}{s+2+K_2} r_2 \qquad (2)$$

با توجه به این که از کنترل شده تناسبی استفاده کرده ایم، برای ورودی مرجع پله و اغتشاش پله (منظور از اغتشاش، ورودی u_1 است). ردیابی حالت ماندگار، حذف اثر اغتشاش نخواهیم داشت. (برای داشتن ردیابی و حذف اغتشاش می‌توانیم از کنترل شده PI استفاده کنیم)

با توجه به تابع تبدیل حلقه بسته محاسبه شده، برای داشتن پایداری باید داشته باشیم:

$$2 + K_2 > 0 \Rightarrow \boxed{K_2 > -2}$$

$$\text{for } K_2 = 1 ; \quad y_2 = \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{g_d} u_1 + \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{g_r} r_2$$

در این حالت $g_d = g_r$ خواهد بود و خروجی به همان میزانی که ورودی مرجع را ردیابی کند، ورودی اغتشاش u_1 را هم ردیابی می‌کند که این حالت اصلاً مطلوب نیست. چرا که ما می‌خواهیم حداقل در حالت ماندگار، $g_r \approx 1$ و $g_d \approx 0$ داشته باشیم.

$$g_r(0) = \frac{K_2}{2+K_2} \approx 1 \Rightarrow K_2 \gg 2$$

$$g_d(0) = \frac{1}{2+K_2} \approx 0 \Rightarrow K_2 \rightarrow \infty$$

بنابراین هرچه K_2 را بزرگتر انتخاب کنیم، رفتار بهتری در خروجی دوم مشاهده می کنیم.
(البته می دانیم در این صورت هزینه ناشی از ایجاد سیگنال کنترلی هم بیشتر می شود، تا
حدی مجاز به افزایش K_2 هستیم که توان تولید سیگنال کنترلی را داشته باشیم)

ب) بستن حلقه اول:

$$y_1 = \frac{-1}{s+2}u_1 + \frac{1}{s(s+2)}u_2 \qquad (3)$$

از رابطه (1) داریم: $u_2 = (s+2)y_2 - u_1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (3)}} y_1 = -\frac{s+1}{s(s+2)}u_1 + \frac{1}{s}y_2$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } y_2 \text{ از (2)}} y_1 = -\frac{s+1}{s(s+2)}u_1 + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+2+K_2}u_1 + \frac{K_2}{s+2+K_2}r_2\right) \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{-(s^2+(2+K_2)s+K_2)}{s(s+2)(s+2+K_2)}u_1 + \frac{K_2}{s(s+2+K_2)}r_2 \xrightarrow{u_1 = K_1(r_1 - y_1)}$$

$$\left(1 - \frac{K_1(s^2+(2+K_2)s+K_2)}{s(s+2)(s+2+K_2)}\right)y_1 = \frac{-K_1(s^2+(2+K_2)s+K_2)}{s(s+2)(s+2+K_2)}r_1 + \frac{K_2}{s(s+2+K_2)}r_2$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-K_1(s^2+(2+K_2)s+K_2)}{d(s)}r_1 + \frac{K_2}{d(s)}r_2$$

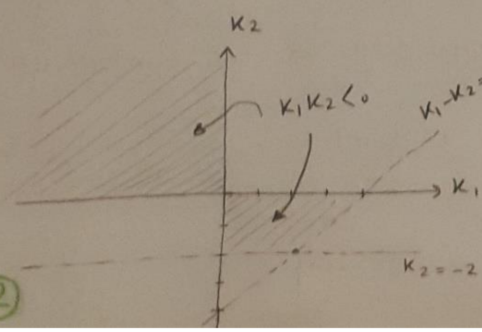
$$d(s) = s^3 + \underbrace{(4+K_2-K_1)}_{a}s^2 + \underbrace{(4+K_2-2K_1-K_1K_2)}_{b}s \underbrace{-K_1K_2}_{c}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & b \\ s^2 & a & c \\ s^1 & \frac{c-ab}{a} & 0 \\ s^0 & c & \end{array}$$

$\rightarrow a > 0 \longrightarrow K_1 - K_2 < 4$

$\rightarrow c > ab \rightarrow K_2^2 + 2K_1^2 + 8K_2 - 12K_1 - K_1K_2(K_1+K_2+6) + 16 > 0$ Ⓐ

$\rightarrow c > 0 \longrightarrow K_1K_2 < 0$



و از بستن حلقه اول هم، $\boxed{K_2 > -2}$ را داریم.

پس K_1، K_2 ای برای پایداری قابل قبول اند که در ناحیه هاشور زده باشند و در Ⓐ صدق کنند!

2-7

آقای مقیمی

سؤال۲)

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{\gamma_1 c_1}{1+sT_1} & \dfrac{(1-\gamma_2)c_1}{(1+sT_1)(1+sT_3)} \\ \dfrac{(1-\gamma_1)c_2}{(1+sT_4)(1+sT_2)} & \dfrac{\gamma_2 c_2}{1+sT_2} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{d(s)}P(s)G(s)$$

$$|P(s)|=\frac{k_c^2 T_1 T_2 k_1 k_2}{A_1 A_2}(1+sT_4)(1+sT_2)(1+sT_1)(1+sT_3)\left(\gamma_1\gamma_2(1+sT_4)(1+sT_3)-(1-\gamma_2)(1-\gamma_1)\right)$$

$$M(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1+sT_4)(1+sT_2)(1+sT_1)(1+sT_3)} & 0 \\ 0 & \gamma_1\gamma_2(1+sT_4)(1+sT_3)-(1-\gamma_2)(1-\gamma_1) \end{bmatrix}$$

حالت اول)

$$Pole=\left\{-\frac{1}{62},-\frac{1}{90},-\frac{1}{23},-\frac{1}{30}\right\} \qquad zeros=\{-0.0594,-0.0174\}$$

$$G(0)=\begin{bmatrix} \gamma_1 c_1 & (1-\gamma_2)c_1 \\ (1-\gamma_1)c_2 & \gamma_2 c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.5808 & 1.4747 \\ 1.4133 & 2.8266 \end{bmatrix}\Rightarrow RGA=\begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ -0.4 & 1.4 \end{bmatrix}$$

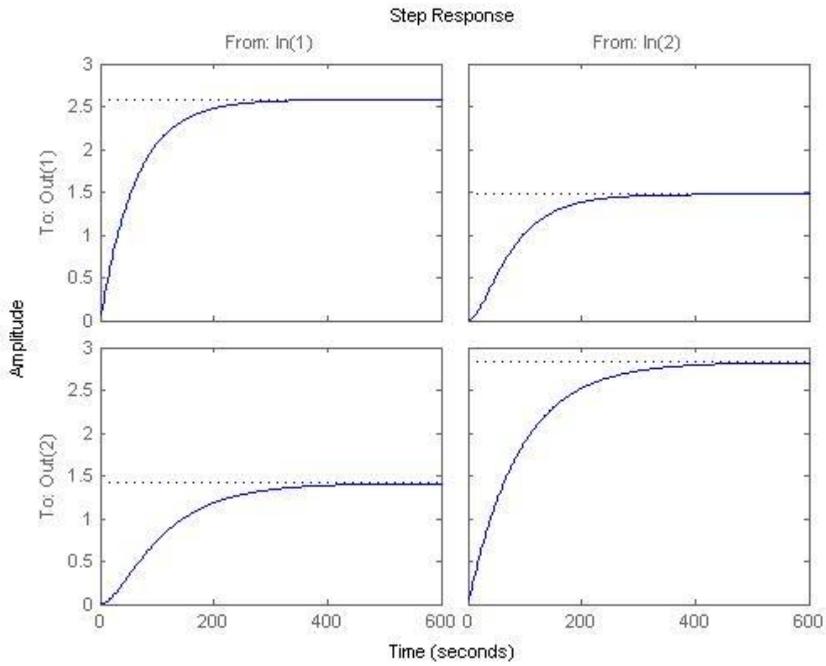
پیکربندی مناسب به صورت زیر است.

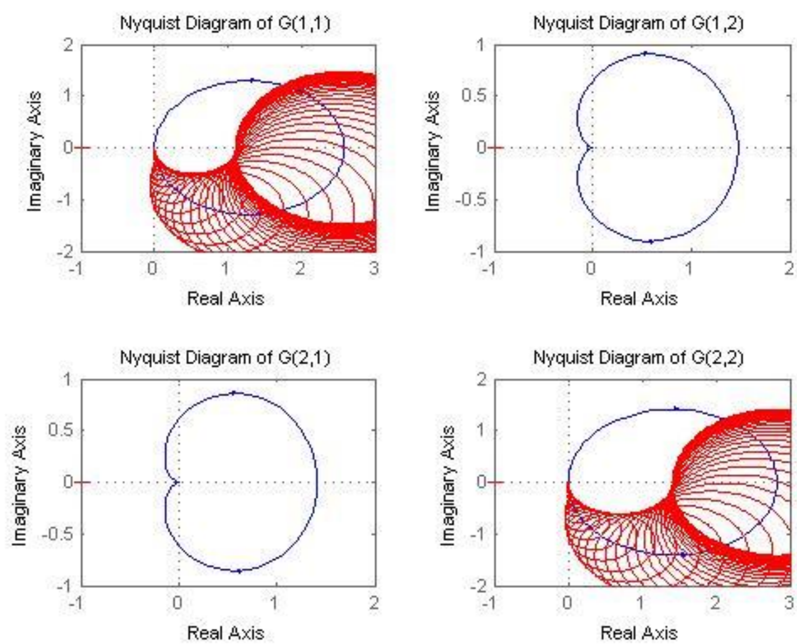
$$u_1 \leftrightarrow y_1, u_2 \leftrightarrow y_2$$

$$NI(G_0)=\frac{\det(G_0)}{\prod g_{ii}}=.7143>0$$

تمامیت داریم.

پاسخ پله و باندهای گرشگورین به صورت زیر است. همان طور که می‌بینیم تداخل زیاد است و ردیابی پله به خوبی صورت نمی‌گیرد. با توجه به باندهای گرشگورین سیستم دارای غلبه قطری است چون از مبدأ نمی‌گذرد. هرچند در فرکانس پایین تداخل داریم اما اثر عناصر قطری بیشتر از عناصر دیگر است.





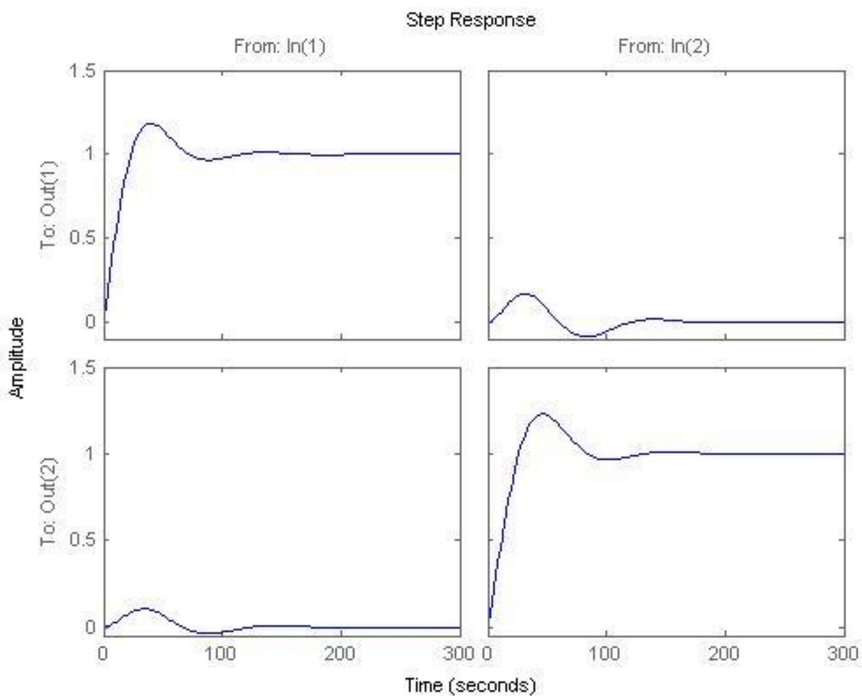
سیستم صفر عنصر سمت راست ندارد پس دشواری کنترل نداریم.برای کنترل، کنترل کننده زیر را در نظر می‌گیریم.

$$C=\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$C_1=K_{p1}+\frac{K_{I1}}{s}$$

$$C_2=K_{p2}+\frac{K_{I2}}{s}$$

برای $K_{p1}=K_{p2}=1.3, K_{I1}=K_{I2}=0.1$ پاسخ پله به صورت زیر است. که هم تداخل کم شده و هم ردیابی به خوبی صورت گرفته. سرعت سیستم نیز افزایش یافته است.



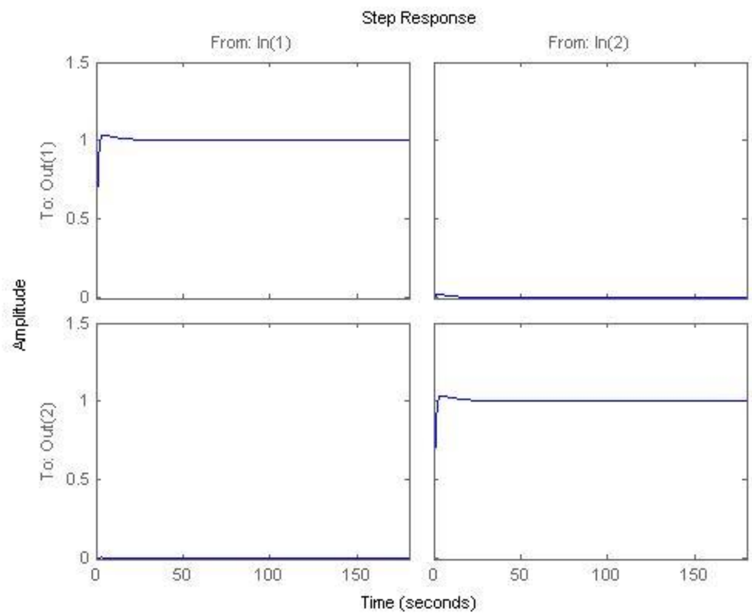
طراحی پیش جبران ساز

پاسخ حالت ماندگار سیستم فوق خوب بود پس نیازی به استفاده از $C_p=\left(G(0)\right)^{-1}$ نیست. برای بهبود پاسخ گذرا از $C_p=\left(CB\right)^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

$$CB=\lim_{s\to\infty} sG(s)=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 c_2}{T_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0416 & 0 \\ 0 & 0.0314 \end{bmatrix}\Rightarrow C_p=\begin{bmatrix} 0.0416 & 0 \\ 0 & 0.0314 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 24.0236 & 0 \\ 0 & 31.8855 \end{bmatrix}$$

پاسخ پله را برای GC_p رسم می‌کنیم. پاسخ به صورت زیر است.



این پیش جبران ساز مناسب بوده چون پاسخ گذرا را بهبود داده است و تداخل کاهش یافته است.

حالت دوم)

$$Pole = \left\{-\frac{1}{63}, -\frac{1}{91}, -\frac{1}{56}, -\frac{1}{39}\right\} \qquad zeros = \{0.0128, -0.0563\}$$

یک صفر نا مینیمم فاز داریم.

$$G(0) = \begin{bmatrix} \gamma_1 c_1 & (1-\gamma_2) c_1 \\ (1-\gamma_1) c_2 & \gamma_2 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.585 & 2.433 \\ 2.685 & 1.602 \end{bmatrix} \Rightarrow RGA = \begin{bmatrix} -.6357 & 1.6357 \\ 1.6357 & -.6357 \end{bmatrix}$$

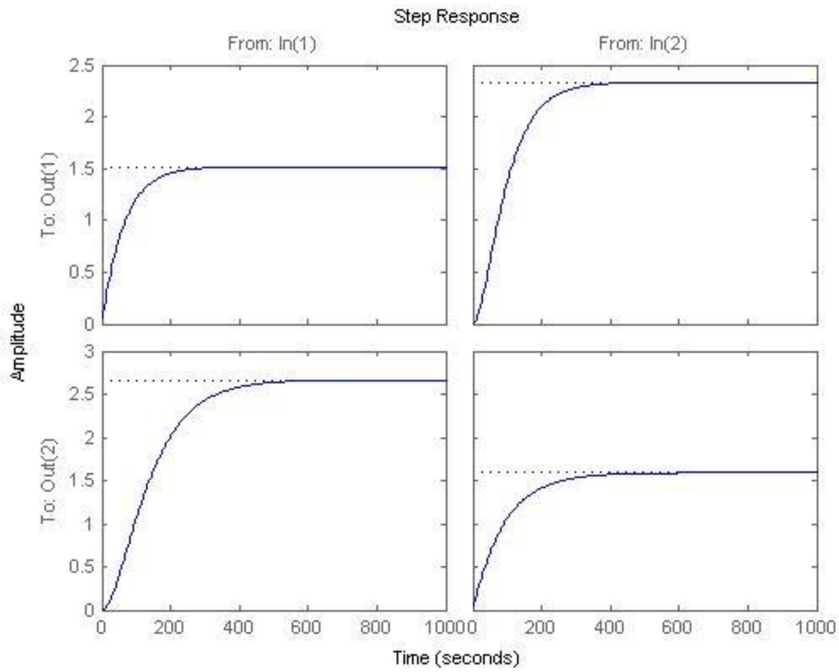
پیکربندی مناسب به صورت زیر است.

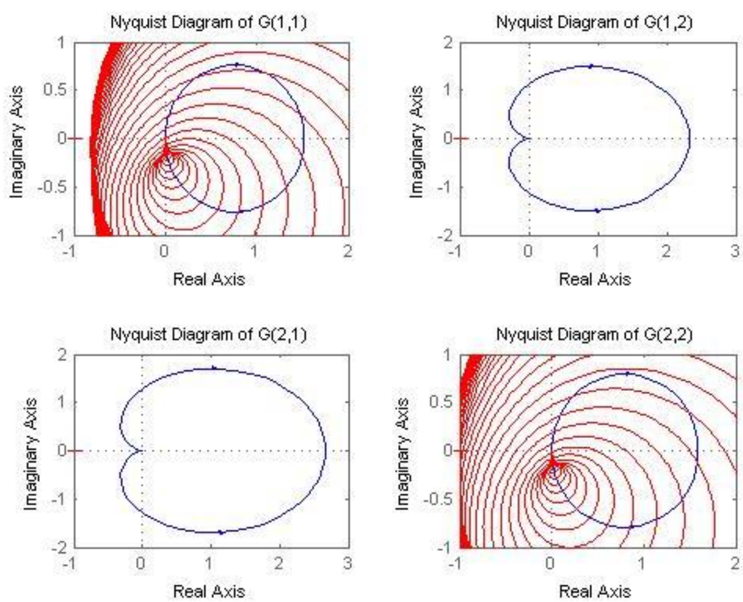
$$u_1 \leftrightarrow y_2, u_2 \leftrightarrow y_1$$

$$\hat{G}(0) = \begin{bmatrix} 2.685 & 1.602 \\ 1.585 & 2.433 \end{bmatrix}$$

$$NI\left(\hat{G}_0\right)=\frac{\det\left(\hat{G}_0\right)}{\prod \hat{g}_{ii}}=0.611>0$$

پاسخ پله و باندهای گرشگورین برای $G(0)$ به صورت زیر است.





باند گرشگورین از مبدأ می‌گذرد و غالب قطری نیست. با توجه به پاسخ پله نیز در می‌یابیم تداخل زیاد است.

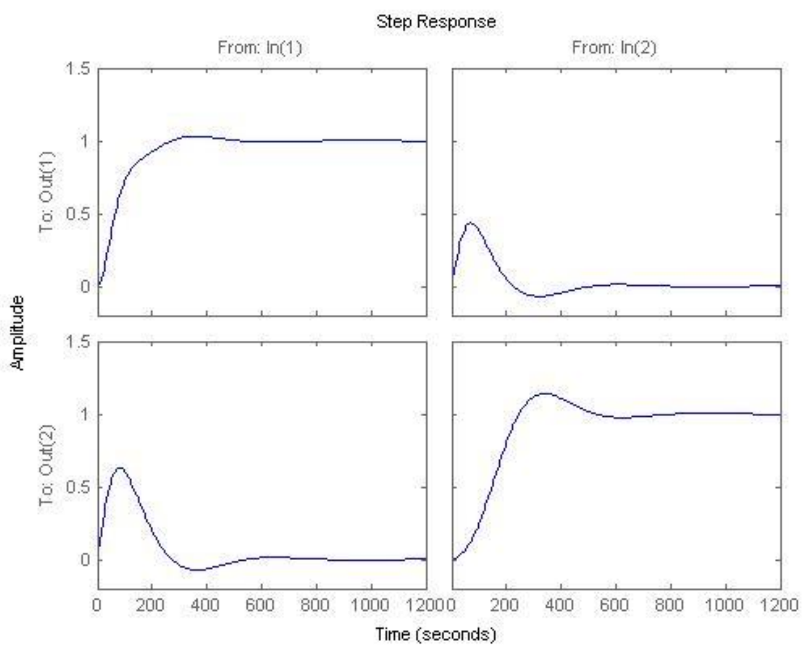
کنترل کننده زیر را در نظر داریم.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = K_{p1} + \frac{K_{I1}}{s}$$

$$C_2 = K_{p2} + \frac{K_{I2}}{s}$$

برای $K_{p1} = 0.5, K_{p2} = .9, K_{I1} = 0.005, K_{I2} = 0.009$ (سعی و خطا) پاسخ پله به صورت زیر است.



همان طور که می‌بینیم رد یابی به خوبی صورت گرفته اما تداخل همچنان وجود دارد و لی در حالت ماندگار تداخل کم شده است.

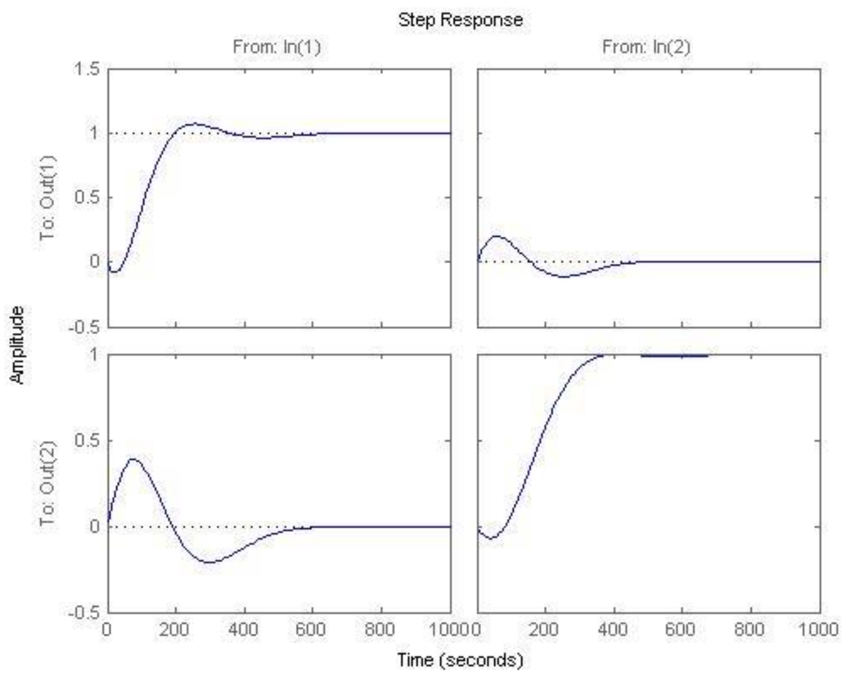
برای غلبه قطری کردن سیستم در فرکانس پایین و رفع تداخل حالت ماندگار از پیش جبران ساز $C_p = \left(G(0)\right)^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

$$C_p = \left(G(0)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.585 & 2.433 \\ 2.685 & 1.602 \end{bmatrix}^{-1}$$

البته این جبران ساز غلبه قطری را روی قطر اصلی می‌برد و ما کنترل کننده را برای قطر فرعی طراحی کردیم.پس باید از جبران ساز زیر استفاده کرد.

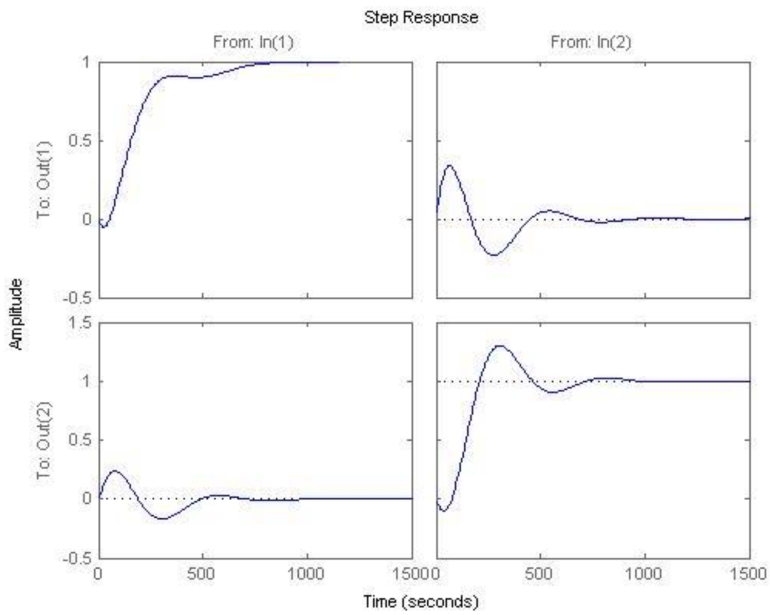
$$\hat{C}_p = \begin{bmatrix} 2.685 & 1.602 \\ 1.585 & 2.433 \end{bmatrix}^{-1}$$

پاسخ پله به صورت زیر است.



حالت ماندگار تداخل ندارد ولی پاسخ گذرا خراب شده است.

اگر از پیش جبران ساز $C_p=\left(G(0)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1.585 & 2.433\\ 2.685 & 1.602\end{bmatrix}^{-1}$ استفاده شود، می‌توان از ترکیب $u_1 \leftrightarrow y_1, u_2 \leftrightarrow y_2$ استفاده کرد پس نتیجه به صورت زیر است که تداخل حالت ماندگار کمی دارد.



برای پاسخ گذرای مناسب می‌توان از پیش جبران ساز $C_p=(CB)^{-1}$ استفاده کرد.

آقای اسفندیاری فرد

سوال 3)

در این حالت ماتریس بهره نسبی به صورت زیر است :

$$\Lambda_{(0)} = \begin{bmatrix} -1.89 & 3.59 & -0.69 \\ -0.13 & 3.02 & -1.89 \\ 3.02 & -5.6 & 3.59 \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن k به طوریکه حلقه بسته پایدار باشد بایستی سیستم پایدار پذیر انتگرالی باشد.

طبق مباحث مطرح شده در صفحه 291 داریم :

_اگر هر کدام از λ_{ii} منفی باشد :

اگر شاخص نیدرلینسکی مثبت باشد سیستم حلقه بسته با از کار افتادن حلقه متناظر ناپایدار خواهد شد.

اگر شاخص نیدرلینسکی منفی باشد سیستم حلقه بسته ناپایدار است اما با از کار افتادن حلقه متناظر پایدار خواهد شد.

که هر دو نامطلوب است.

البته اینجا مقادیر $G_{(0)}$ را نداریم تا شاخص نیدرلینسکی را حساب کنیم پس از روی ماتریس RGA داریم :

از آنجا که برای جفت کردن بایستی حتما آرایه بهره نسبی مثبت باشد برای کنترل y1 به ناچار از u2 استفاده می‌کنیم ؛ برای y2 نیز بایستی شرط مثبت بودن برقرار باشد که در این حالت هم به ناچار بایستی از u2 استفادی کنیم در صورتیکه u2 برای کنترل y1 به کار رفته است ؛ پس نمی‌توان جفت مناسبی برای y2 پیدا کرد و بنابراین نمی‌توان k پایدار در این حالت پیدا کرد که حلقه بسته پایدار باشد.

سؤال۴)

آقای مقیمی

$$G_1(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{8e^{-0.05s}}{4s^2+3s+2} & \dfrac{.5e^{-s}}{(s+1)(2s+1)}\\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-.2s+1}{(s+1)^2}\end{bmatrix}$$

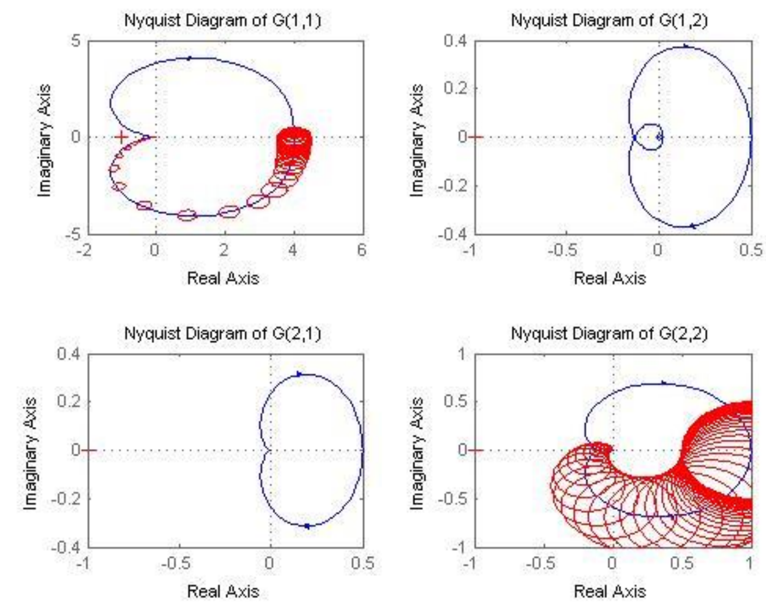
$$G_1(0)=\begin{bmatrix}4 & .5\\ .5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \Lambda=\begin{bmatrix}1.0667 & \text{-}0.0667\\ \text{-}0.0667 & 1.0667\end{bmatrix}$$

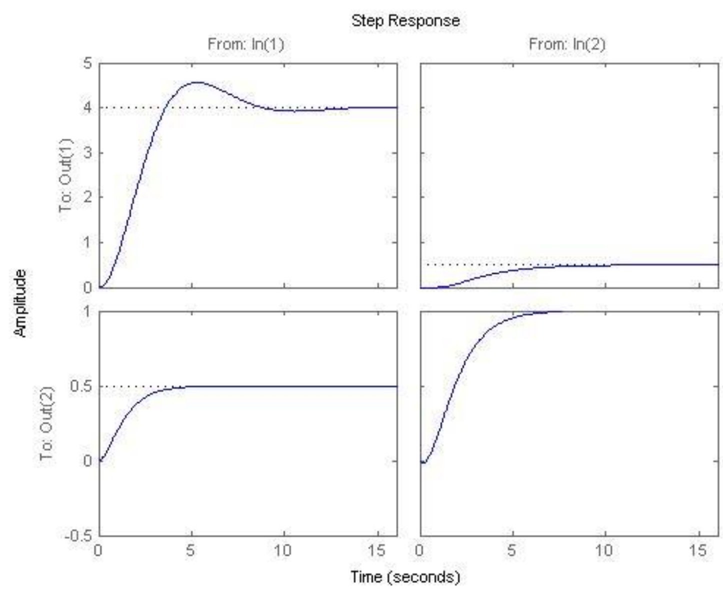
از ترکیب $u_1\leftrightarrow y_1, u_2\leftrightarrow y_2$ استفاده می‌شود.

$$NI\left(G_0\right)=\frac{\det\left(G_0\right)}{\prod g_{ii}}=0.9375>0$$

تمامیت داریم.

باندهای گرشگوری و پاسخ پله حلقه باز به صورت زیر است.





غلبه قطری داریم چون باند مبدأ را شامل نمی‌شود و تداخل نیز داریم.

تابع $G_1(s)$، DIC است اگر

$$G_1^+(0)=\begin{bmatrix}4 & .5\\ .5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow G_{1t}^+(0):\begin{cases}4d_1>0\\ 1d_2>0\\ \lambda_1>0,\lambda_2>0\end{cases}$$

$$\lambda I-\begin{bmatrix}4 & .5\\ .5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-4d_1 & -.5d_2\\ -.5d_1 & \lambda-d_2\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda^2-\left(4d_1+d_2\right)\lambda+3.75d_1d_2$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=4d_1+d_2\\ \lambda_1\lambda_2=3.75d_1d_2\ \Rightarrow\lambda_1>0,\lambda_2>0\\ d_1>0,d_2>0\end{cases}$$

که برقرار شد.

پس با توجه به قضیه ۷-۷ تمام تک حلقه‌ها پایدار خواهد بود و با بستن هر حلقه سیستم پایدار می‌ماند و اگر بهره یک حلقه تا نزدیکی صفر برود سیستم پایدار می‌ماند.

$$u_1=k_1e_1=k_1\left(r_1-y_1\right)$$

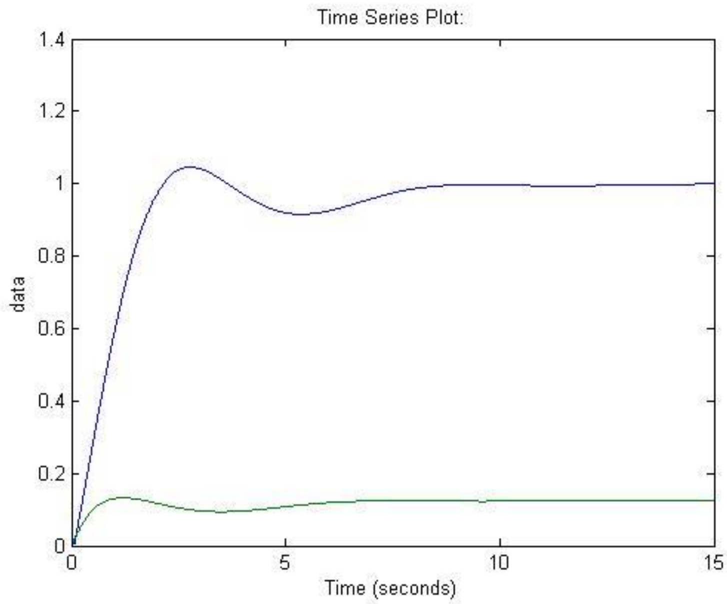
$$y_1=g_{11}u_1+g_{12}u_2\Rightarrow y_1=g_{11}k_1\left(r_1-y_1\right)+g_{12}u_2\Rightarrow$$

$$y_1=\frac{8e^{-0.05s}k_1}{4s^2+3s+2+8e^{-0.05s}k_1}r_1+\frac{\frac{.5e^{-s}}{(s+1)(2s+1)}}{4s^2+3s+2+8e^{-0.05s}k_1}u_2$$

با تقریب داریم $e^{-Ts}=\dfrac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}\Rightarrow e^{-0.05s}=\dfrac{1-0.025s}{1+0.025s}$.

$$y_1=\frac{8\frac{1-0.025s}{1+0.025s}k_1}{4s^2+3s+2+8\frac{1-0.025s}{1+0.025s}k_1}r_1+\frac{\frac{.5\frac{1-0.5s}{1+0.5s}}{(s+1)(2s+1)}}{4s^2+3s+2+8\frac{1-0.025s}{1+0.025s}k_1}u_2$$

ابتدا حلقه اول را می‌بندیم و با تیون متلب کنترل کننده به صورت $K_{p1}=0.516,K_{I1}=0.221,K_{D1}=0.298$ در می‌آید. شکل زیر پاسخ پله این حالت است.



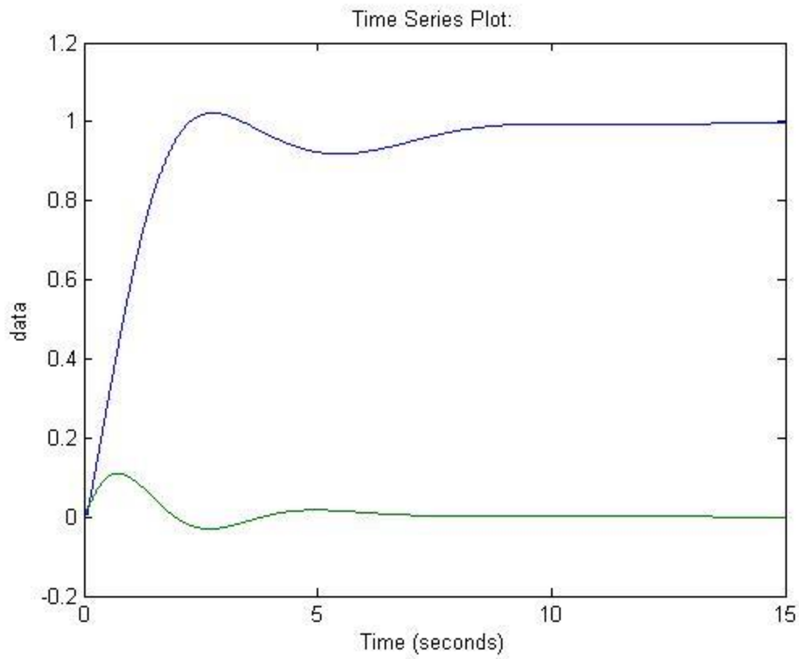
منحنی آبی رنگ خروجی اول و سبز رنگ خروجی دوم است. ردیابی داریم و تداخل (اغتشاش) کم شده است.

حال حلقه دوم را می‌بندیم.

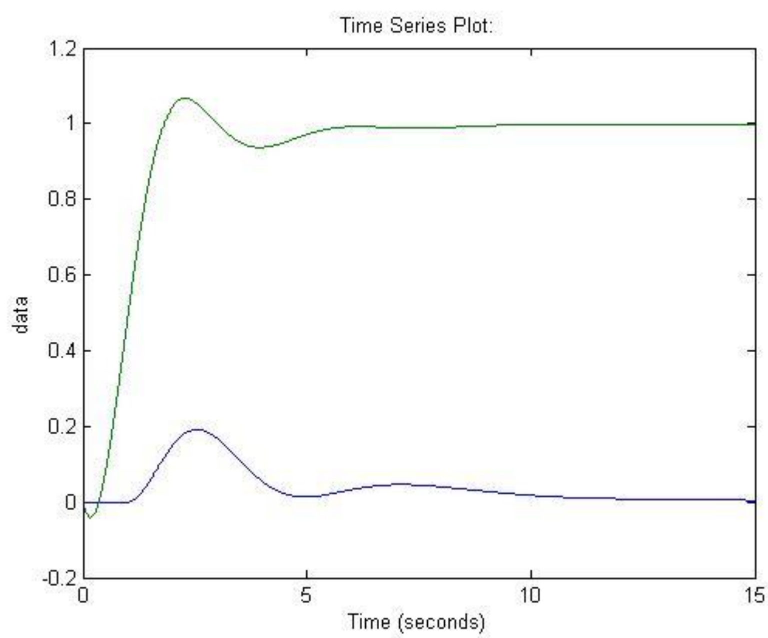
$$u_2 = k_2 e_2 = k_2 \left(r_2 - y_2 \right)$$
$$g_{11}^{-1} y_1 - g_{11}^{-1} g_{12} u_2 = u_1$$
$$y_1 = \frac{g_{11} k_1}{1 + g_{11} k_1} r_1 + \frac{g_{12}}{1 + g_{11} k_1} u_2$$
$$y_2 = g_{21} u_1 + g_{22} u_2 \Rightarrow y_2 = \frac{g_{21} k_1}{1 + g_{11} k_1} r_1 + \frac{k_2 \left(g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{22} - g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{11} k_1 g_{22} - k_1 g_{21} g_{12} \right)}{1 + g_{11} k_1} \left(r_2 - y_2 \right)$$
$$d(s) = k_2 \left(g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{22} - g_{21} g_{11}^{-1} g_{12} + g_{11} k_1 g_{22} - k_1 g_{21} g_{12} \right)$$
$$y_2 \left(\frac{1 + g_{11} k_1 + d(s)}{1 + g_{11} k_1} \right) = \frac{g_{21} k_1}{1 + g_{11} k_1} r_1 + \frac{d(s)}{1 + g_{11} k_1} r_2 \Rightarrow y_2 = \frac{g_{21} k_1}{1 + g_{11} k_1 + d(s)} r_1 + \frac{d(s)}{1 + g_{11} k_1 + d(s)} r_2$$

با استفاده از تیون برای حلقه دوم کنترل کننده به صورت $K_{p1} = 1.883, K_{I1} = 0.937, K_{D1} = 0.384$ است.

برای ورودی $[0 \quad 1]$ نتایج خروجی به صورت زیر است. منحنی آبی رنگ خروجی اول و سبز رنگ خروجی دوم است.



برای ورودی $[1 \quad 0]$ نتایج خروجی به صورت زیر است. منحنی آبی رنگ خروجی اول و سبز رنگ خروجی دوم است.



همان‌طور که می‌بینیم تداخل در حالت ماندگار کم است و خروجی ردیابی می‌شود.

آقای اسفندیاری فرد

سوال 4)

در این حالت ماتریس تابع تبدیل به صورت زیر خواهد بود :

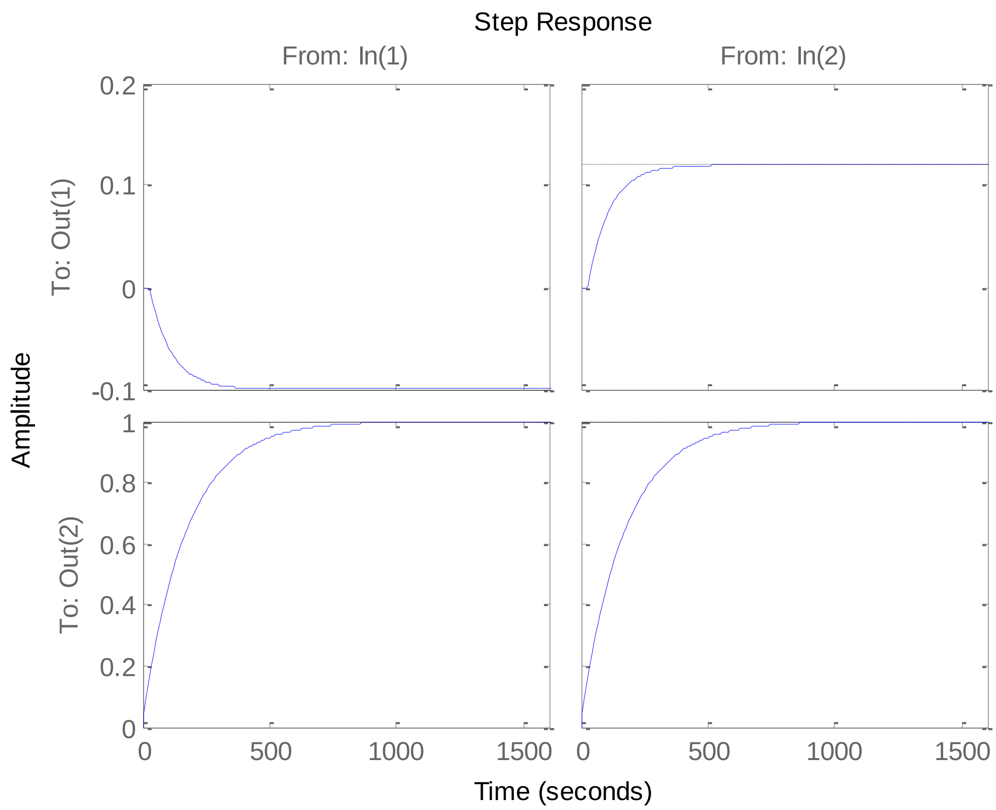
$$G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.1e^{-30s}}{85s+1} & \frac{0.12e^{-30s}}{85s+1} \\ \frac{1}{170s+1} & \frac{1}{170s+1} \end{bmatrix}$$

$$G_{(0)} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

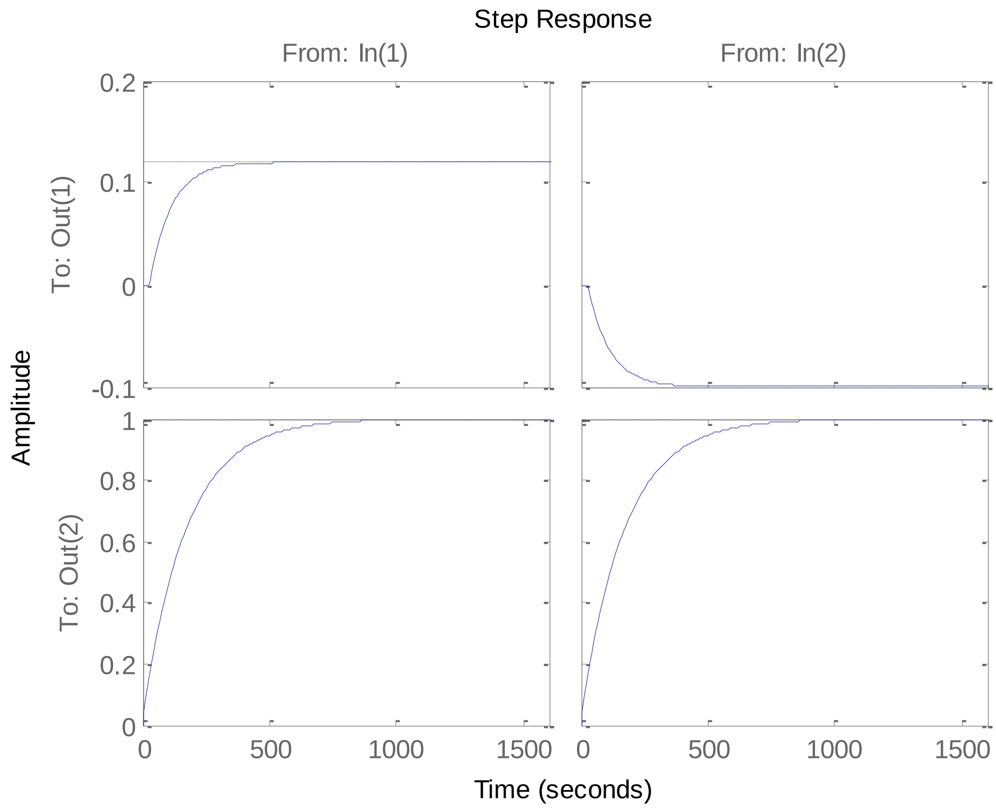
$$\Lambda = G_{(0)}.*G_{(0)}{}^{-T} = \begin{bmatrix} 0.4545 & 0.5455 \\ 0.5455 & 0.4545 \end{bmatrix}$$

در این حالت آرایه های روی قطر اصلی و فرعی بسیار نزدیک به هم هستند و این امر تداخل زیاد را نشان می‌دهد.

پاسخ پله حلقه باز به ازای جفت u1:y1 و u2:y2



پاسخ پله حلقه باز به ازای جفت u2:y1 و u1:y2

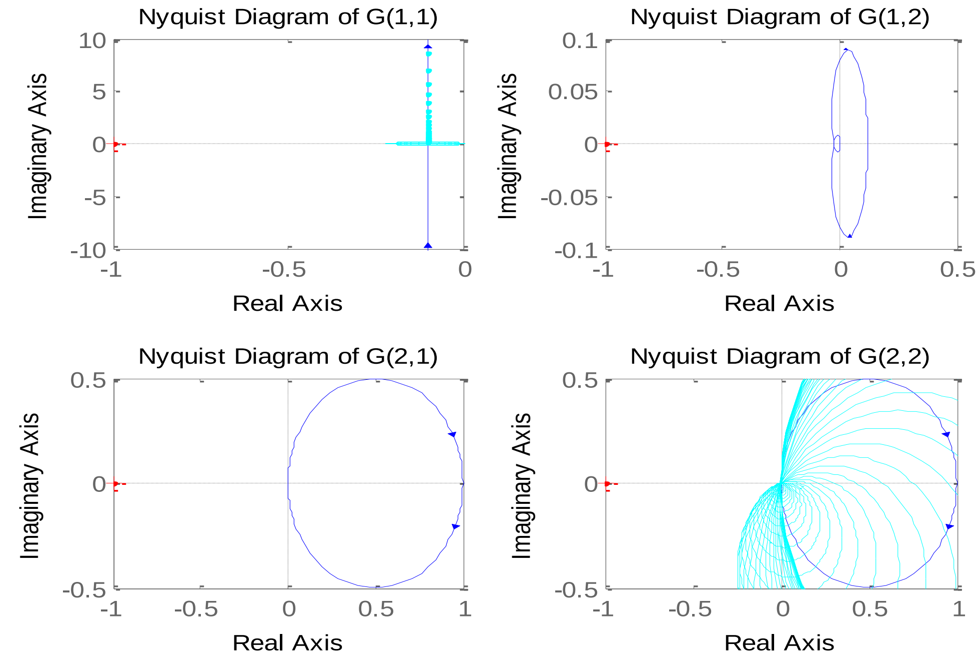


همان‌گونه که از RGA مشخص بود جفت کردن دوم به دلیل اینکه به 1 نزدیک ترند مناسب تر است و پاسخ پله هم در جفت دوم تداخل کمتری را نشان می‌دهد هرچند تداخل در حالت کلی زیاد است.

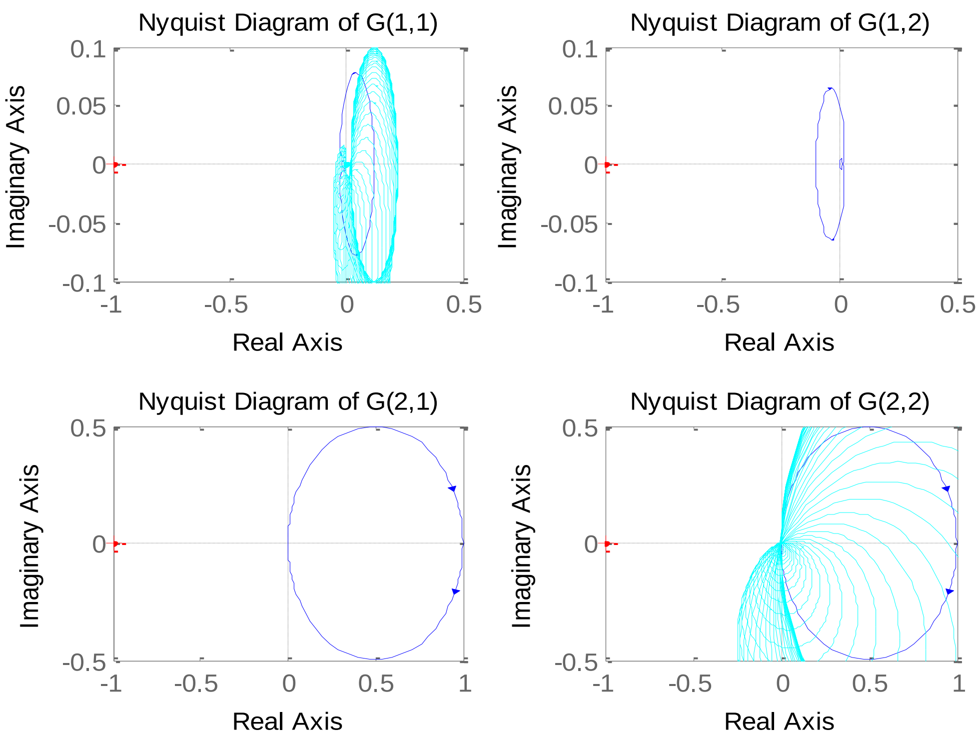
حال دوایر گرشگورین را رسم می‌کنیم :

همان گونه که در دوایر گرشگورین هم مشاهده می‌شود جفت دوم تداخل کمتری را نشان می‌دهد که این امر هم در RGA و هم در پاسخ پله مشاهده شد.

دوایر گرشگورین به ازای جفت u1:y1 و u2:y2



دوایر گرشگورین به ازای جفت u2:y1 و u1:y2



که برای رسم از تقریب پده استفاده شده است.

ابتدا حلقه‌ی دوم که سریع‌تر است (تأخیر ندارد) می‌بندیم :

با جفت u_1 و y_2 داریم :

$$y_2 = \frac{1}{170s+1}u_1 + \frac{1}{170s+1}u_2$$

که جمله آخر به منزله اغتشاش است

$$y_2 = \frac{1}{170s+1}K_1(s)(r_1-y_2) + \frac{1}{170s+1}u_2$$

$$y_2\left(1+\frac{K_1}{170s+1}\right) = \frac{K_1}{170s+1}r_1 + \frac{1}{170s+1}u_2$$

$$\rightarrow y_2 = \frac{K_1}{(170s+1)+K_1}r_1 + \frac{1}{(170s+1)+K_1}u_2$$

حال برای این رابطه PID می‌زنیم با آزمون و خطا کنترلر زیر به دست می‌آید :

حلقه‌ی اول را می‌بندیم :

$$y_1 = \frac{-0.1e^{-30s}}{85s+1}u_1 + \frac{0.12e^{-30s}}{85s+1}u_2$$

$$y_1 = \frac{-0.1e^{-30s}}{85s+1}\left((170s+1)y_2 - u_2\right) + \frac{0.12e^{-30s}}{85s+1}u_2$$

$$y_1 = \frac{-0.1e^{-30s}(170s+1)}{85s+1}y_2 + \frac{0.02e^{-30s}}{85s+1}u_2$$

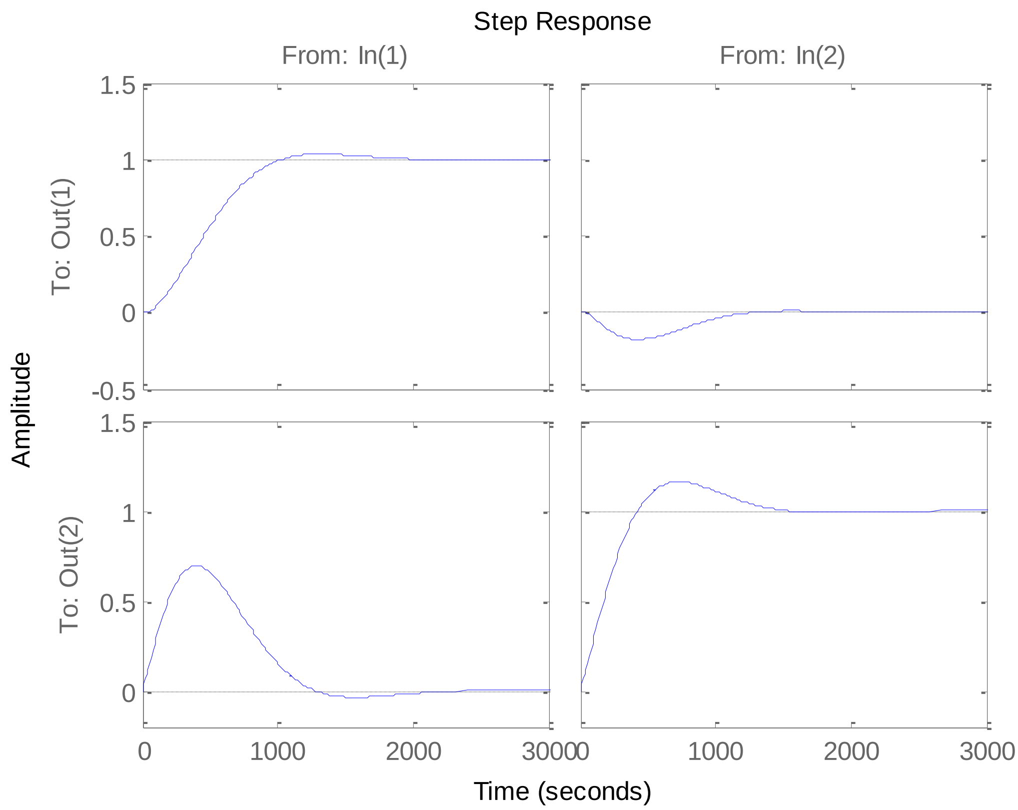
$$y_1 = \underbrace{\frac{-0.1e^{-30s}K_1(s)(170s+1)}{(85s+1)(170s+1+K_1(s))}}_{a}r_1 + \underbrace{\left(\frac{-0.1e^{-30s}(170s+1)}{170s+1+K_1(s)} + \frac{0.02e^{-30s}}{85s+1}\right)}_{b}u_2$$

$$y_1 = ar_1 + bK_2(s)(r_2-y_1) \rightarrow y_1 = \frac{a}{1+bK_2(s)}r_1 + \frac{bK_2(s)}{1+bK_2(s)}r_2$$

حال ضرایب PID را با آزمون و خطا می‌یابیم :

```
>> pretty(PID)
/        1                           \
|   s + --- + 5                      |
|       5 s                          |
| - -----------,        0            |
|      s + 20                        |
|                                    |
|                       1            |
|               s + ---- + 10        |
|                   10 s             |
|       0,      -------------         |
\                  s + 20            /
```

پاسخ پله :

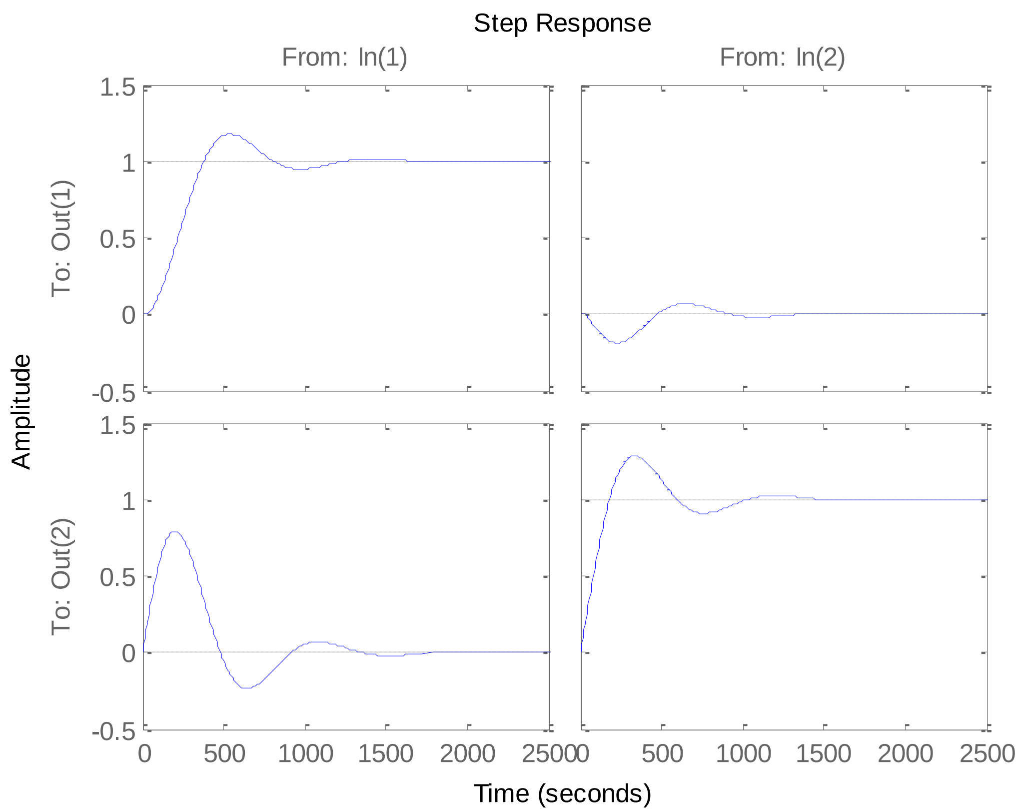


که زمان نشست زیادی داشته و ردیابی دارد و اغتشاش را نیز حذف می‌کند. تنها بدی آن کند بودن آن است.

که میتوان پاسخ سریعتری داشت که البته این امر موجب اورشوت می‌شود.

```
>> pretty(PID)
/           1                          \
|    2 s + --- + 15                    |
|          2 s                         |
| - ---------------,         0         |
|        s + 20                        |
|                                      |
|                              3        |
|                      2 s + ---- + 20  |
|                             10 s      |
|         0,           ---------------  |
\                          s + 20      /
```

پاسخ پله :



آقای شیخی

جواب سوال 5 :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & -0.01 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \quad , \quad G(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ -1 & 0.1 & 1 \\ 0.5 & -0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$

حالت اول :

با توجه به RGA داده شده می توان حالت های مختلف پیکربندی و جفت کردن ورودی خروجی را برای سیستم زیر متصور شد:

از آنجایی که درایه λ_{22} منفی می باشد پس از پیکربندی به صورت ($u1\leftrightarrow y1$ و $u2\leftrightarrow y2$ و $u3\leftrightarrow y3$) نمی توان استفاده نمود و مشکلات کنترلی به وجود می آید (شبیه به فیدبک مثبت)

حالت اول :

حال اگر ردیف اول را با ردیف دوم عوض نماییم به فرم روبرو می رسیم :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.01 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

حال باید به موازات این تغییر G(0) را نیز عوض نموده سپس شاخص نیدرلینسکی را محاسبه نماییم :

$$G_{new}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & -0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$NI\big(G_{new}(0)\big) = \frac{\det(G_{new}(0))}{g_{11}(0)g_{22}(0)g_{33}(0)} = \frac{-0.767}{-0.08} = 9.5875$$

همانطور که می بینیم تمام عناصر قطری مثبت و NI نیز مثبت گردیده پس می توان از این پیکربندی برای کنترل استفاده نمود

(u1↔y2 و u2↔y1 و u3↔y3)

حالت دوم :

حال اگر ردیف دوم را با ردیف سوم عوض نماییم به فرم روبرو می رسیم :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

حال باید به موازات این تغییر G(0) را نیز عوض نموده سپس شاخص نیدرلینسکی را محاسبه نماییم :

$$G_{new}(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & -0.6 & 0.1 \\ -1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$NI\left(G_{new}(0)\right) = \frac{\det(G_{new}(0))}{g_{11}(0)g_{22}(0)g_{33}(0)} = \frac{-0.767}{-0.12} = 6.391$$

همانطور که می بینیم تمام عناصر قطری مثبت و NI نیز مثبت گردیده پس می توان از این پیکربندی برای کنترل استفاده نمود

(u1↔y1 و u2↔y3 و u3↔y2)

حالت سوم :

حال اگر ابتدا ردیف اول را با ردیف سوم جا به حا نماییم و سپس ردیف دوم را با ردیف سوم عوض کنیم به فرم روبرو می رسیم :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & -0.01 & 0.6 \end{bmatrix}$$

حال باید به موازات این تغییر G(0) را نیز عوض نموده سپس شاخص نیدرلینسکی را محاسبه نماییم :

$$G_{new}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ -1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$NI\left(G_{new}(0)\right) = \frac{\det(G_{new}(0))}{g_{11}(0)g_{22}(0)g_{33}(0)} = \frac{0.767}{0.4} = 1.9175$$

همانطور که می بینیم تمام عناصر قطری مثبت و NI نیز مثبت گردیده پس می توان از این پیکربندی برای کنترل استفاده نمود

(u1↔y2 و u3↔y1 و u2↔y3)

همچنین به جز این حالات دو حالت دیگر نیز وجود دارد که اگر انجام دهیم یکی از عناصر روی قطر منفی می گردد و مطلوب نیست.

حال از بین این سه حالت برای پیکربندی کنترل می توان حالتی که بهتر می باشد را انتخاب نمود و آن حالتی است که در آن عناصر روی قطر به 1 نزدیک تر باشند و در عین حال شاخص نیدرلینسکی برای آنها مثبت باشد پس با این توضیحات داده شده حالت سوم را به عنوان بهترین وضعیت پیکربندی کنترل برایسیستم در نظر می گیریم .

پیکربندی پیشنهادی :

(u1↔y2 و u3↔y1 و u2↔y3)

سوال ۶:

آقای صادقی فروز

تابع تبدیل سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+2} & \frac{4}{s+2} \\ \frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

برای سیستم فوق به روش حلقه بستن ترتیبی، کنترل کننده های غیرمتمرکز طراحی کنید که خطای ماندگار را برای ردیابی ورودی پله صفر کند.

ابتدا RGA را بدست می آوریم:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ,,,,, \quad NI = 3 > 0$$

جفت ورودی-خروجی های زیر پیشنهاد می شود:

$$G_1: \begin{cases} u_1 \to \\ u_2 \to \end{cases} \begin{cases} y_2 \\ y_1 \end{cases}$$

برای حلقه ی اول داریم:

$$y_1 = \frac{-2}{s+2}u_1 + \frac{4}{s+2}u_2 \qquad ,,,,,, \qquad u_2 = \frac{k_1}{s}(r_2 - y_1)$$

$$y_1 = \frac{-2}{s+2}u_1 + \frac{4}{s(s+2)}k_1(r_2 - y_1)$$

$$\left(1 + \frac{4k_1}{s(s+2)}\right)y_1 = \frac{-2}{s+2}u_1 + \frac{4k_1}{s(s+2)}r_2$$

$$y_1 = \frac{-2s}{s^2+2s+4k_1}u_1 + \frac{4k_1}{s^2+2s+4k_1}r_2$$

همانطور که مشـــاهده میشـــود، به ازای $k_1 > 0$ خروجی اول ورودی مرجع دوم را بدون خطا دنبال می کند، حال فرض می کنیم که $k_1 = 1$ و با این فرض به ادامه ی طراحی می پردازیم:

$$y_2 = \frac{2}{s+2}u_1 + \frac{2}{s+2}u_2$$

$$y_2 = \frac{3}{s+2}u_1 + \frac{1}{2}y_1$$

$$y_2 = \frac{3}{s+2}u_1 + \frac{-s}{s^2+2s+4}u_1 + \frac{2}{s^2+2s+4}r_2 \qquad ,,,,, \quad y_2 = 2\frac{s^2+2s+6}{(s+2)(s^2+2s+4)}u_1 + \frac{2}{s^2+2s+4}r_2$$

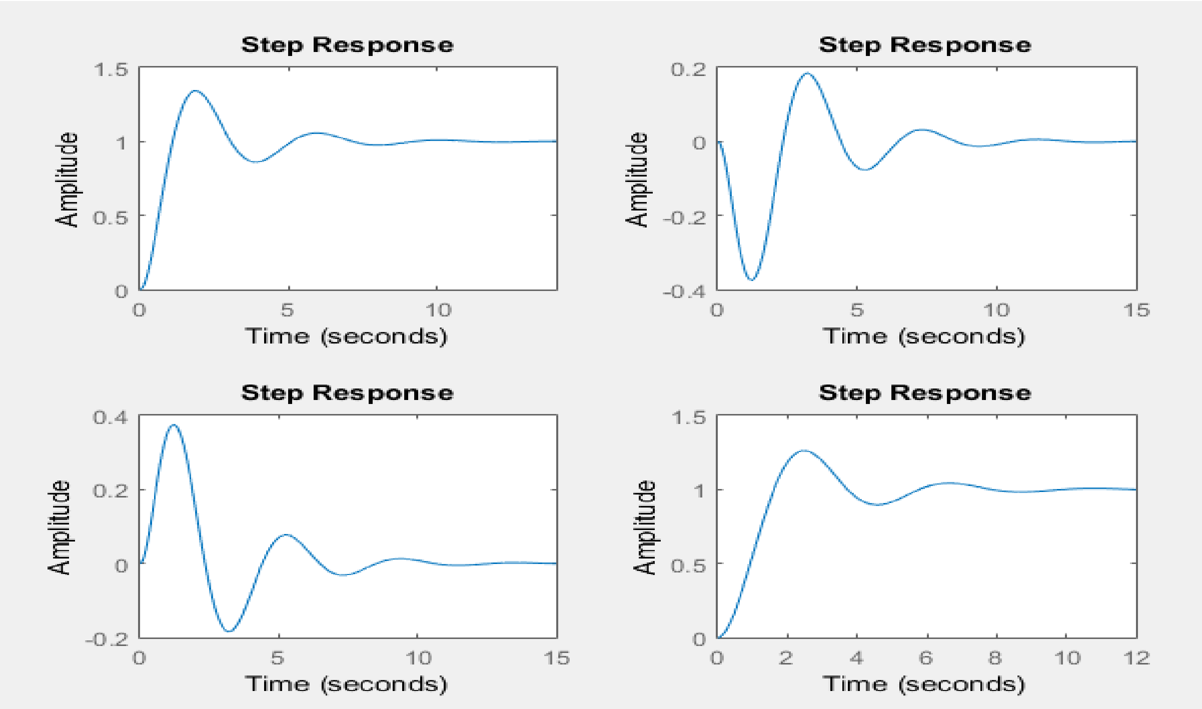
$$u_1 = \frac{k_2}{s}(r_1 - y_2) \qquad ,,,,,, \quad y_2 = 2\frac{s^2+2s+6}{(s+2)(s^2+2s+4)}\frac{k_2}{s}(r_1 - y_2) + \frac{2}{s^2+2s+4}r_2$$

$$y_2 = \frac{2k_2(s^2+2s+6)}{d(s)}r_1 + \frac{2s(s+2)}{d(s)}r_2$$

که $d(s) = s^4 + 4s^3 + (8 + 2k_2)s^2 + (8 + 4k_2)s + 12k_2$ می باشد.

لذا به ازای تمام $k_2 > 0$ سیستم پایدار بوده و خروجی دوم ورودی اول را بدون خطا دنبال می کند.

در شکل زیر $k_2 = 1$ فرض شده است و پاسخ های پله به ازای ورودی های $[1\ 0]^T$ و $[0\ 1]^T$ آمده است.



سوال 6)

$$G_{(s)} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{s+3} & \frac{3}{s+3} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$G_{(0)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{(0)} = G_{(0)}.^{*}\, G_{(0)}{}^{-T} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

همان‌گونه که دیده می‌شود عناصر روی قطر اصلی به یک نزدیکتر بوده و مثبت‌اند بنابراین از جفت u1:y1 و u2:y2 استفاده می‌کنیم. در این حالت ابتدا حلقه اول را با کنترلر انتگرالی $\frac{k_1}{s}$ می‌بندیم :

$$y_1 = -\frac{6}{s+3}u_1 + \frac{3}{s+3}u_2 = -\frac{6k_1}{s(s+3)}(r_1 - y_1) + \frac{3}{s+3}u_2$$

که در این حالت داریم :

$$y_1\left(1 - \frac{6k_1}{s(s+3)}\right) = -\frac{6k_1}{s(s+3)}r_1 + \frac{3}{s+3}u_2$$

$$y_1 = -\frac{6k_1}{s^2+3s-6k_1}r_1 + \frac{3s}{s^2+3s-6k_1}u_2$$

در این حالت به ازای k_1 منفی پایدار خواهد بود و تداخل حذف می‌شود.

$$\lim_{s\to 0} y_1 = r_1$$

حال به ازای $k_1 = -1$ داریم :

$$y_1 = \frac{6}{s^2+3s+6}r_1 + \frac{3s}{s^2+3s+6}u_2$$

حال به طراحی حلقه دوم می‌پردازیم. در این حالت داریم :

$$y_2 = \frac{1}{s+3}u_1 + \frac{1}{s+3}u_2$$

$$u_1 = -\frac{s+3}{6}y_1 + \frac{1}{2}u_2$$

$$y_2 = \frac{-1}{6}y_1 + \frac{3}{2(s+3)}u_2$$

$y_2 = \frac{-1}{s^2+3s+6} r_1 + \frac{-0.5s}{s^2+3s+6} u_2 + \frac{3}{2(s+3)} u_2$

$y_2 = \frac{-1}{s^2+3s+6} r_1 + \frac{s^2+3s+9}{(s^2+3s+6)(s+3)} u_2$

$y_2 = \frac{-1}{s^2+3s+6} r_1 + \frac{s^2+3s+9}{(s^2+3s+6)(s+3)} \frac{k_2}{s} (r_2 - y_2)$

$y_2 (1 + \frac{k_2(s^2+3s+9)}{s(s^2+3s+6)(s+3)}) = \frac{-1}{s^2+3s+6} r_1 + \frac{k_2(s^2+3s+9)}{s(s^2+3s+6)(s+3)} \; r_2$

$y_2 = \frac{-s(s+3)}{s(s^2+3s+6)(s+3)+k_2(s^2+3s+9)} r_1 + \frac{k_2(s^2+3s+9)}{s(s^2+3s+6)(s+3)+k_2(s^2+3s+9)} r_2$

$\lim_{s\to 0} y_2 = r_2$

بنابراین به شرط پایداری به ازای تمام مقادیر k_2 ردیابی خواهد داشت.

معادله مشخصه :

$s^4 + 6s^3 + (15 + k_2)s^2 + (18 + 3k_2)s + 9k_2 = 0$

با روش راوث داریم :

s^4	1	$15 + k_2$	$9k_2$
s^3	2	$6 + k_2$	
s^2	$24 + k_2$	$9k_2$	
s^1	${k_2}^2+12k_2+144$		
s^0	$9k_2$		

که سطر دوم بر 3 تقسیم شده است. برای پایداری کافی‌است k_2 مثبت انتخاب شود. مثلا به ازای k_2=1 داریم :

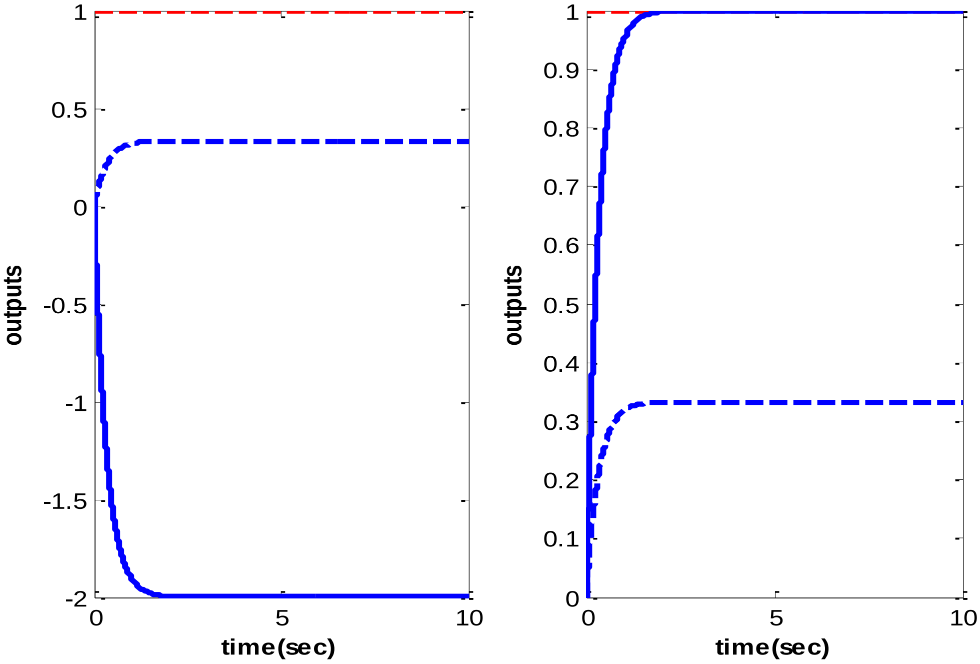
$y_2 = \frac{-s(s+3)}{s^4+6s^3+16s^2+21s+9} r_1 + \frac{s^2+3s+9}{s^4+6s^3+16s^2+21s+9} r_2$

$\lim_{s\to 0} y_2 = r_2$

که ردیابی و حذف اغتشاش داریم.

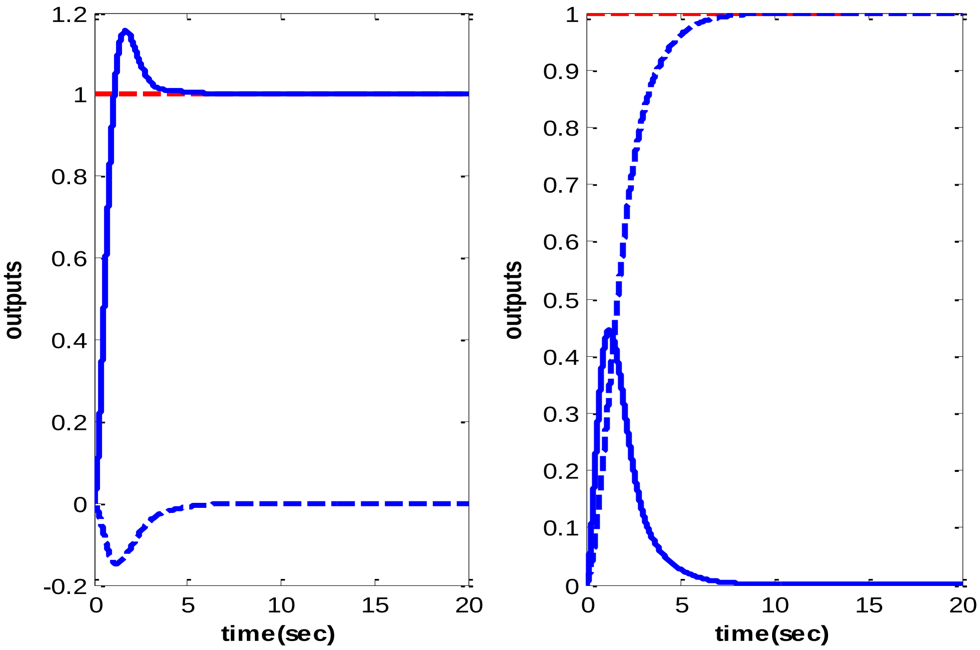
حال پاسخ حلقه باز و حلقه بسته را مشاهده می‌کنیم.

حلقه باز :



خط پررنگ خروجی اول و خط چین خروجی دوم است که سیستم حلقه باز تداخل دارد.

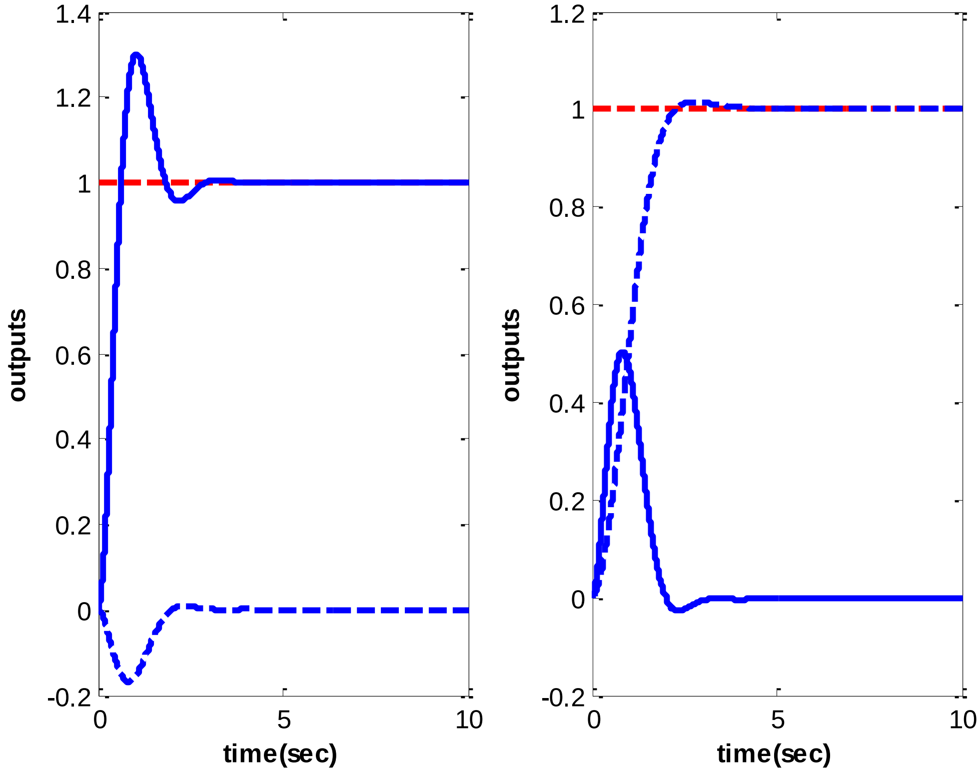
پاسخ حلقه بسته :



که ردیابی و حذف اغتشاش مشهود است.

حال میتوان بهره‌ها را بالاتر انتخاب کرد تا سیستم سریعتر شود اما اورشوت افزایش میابد.

مثلا اگر گین‌ها را 2 برابر کنیم داریم :



که سریعتر شده اما پیک اورشوت چه در پاسخ و چه در تداخل بالاتر رفته است.

جواب سوال 1- 8)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1.33)(s+1.89)} \begin{bmatrix} 1.496(s+1.7) & 951.5(s+1.898) \\ 8.52(s+1.44) & 1240(s+2.037) \end{bmatrix}$$

الف) بررسی مشخصه ها و پاسخ حلقه باز سیستم :

بدست آوردن فرم اسمیث مک میلان :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1.33)(s+1.89)} & 0 \\ 0 & \frac{-\frac{312587s^2}{50} - \frac{503203679s}{25000} - \frac{1229139417}{78125}}{(s+1.33)(s+1.89)} \end{bmatrix}$$

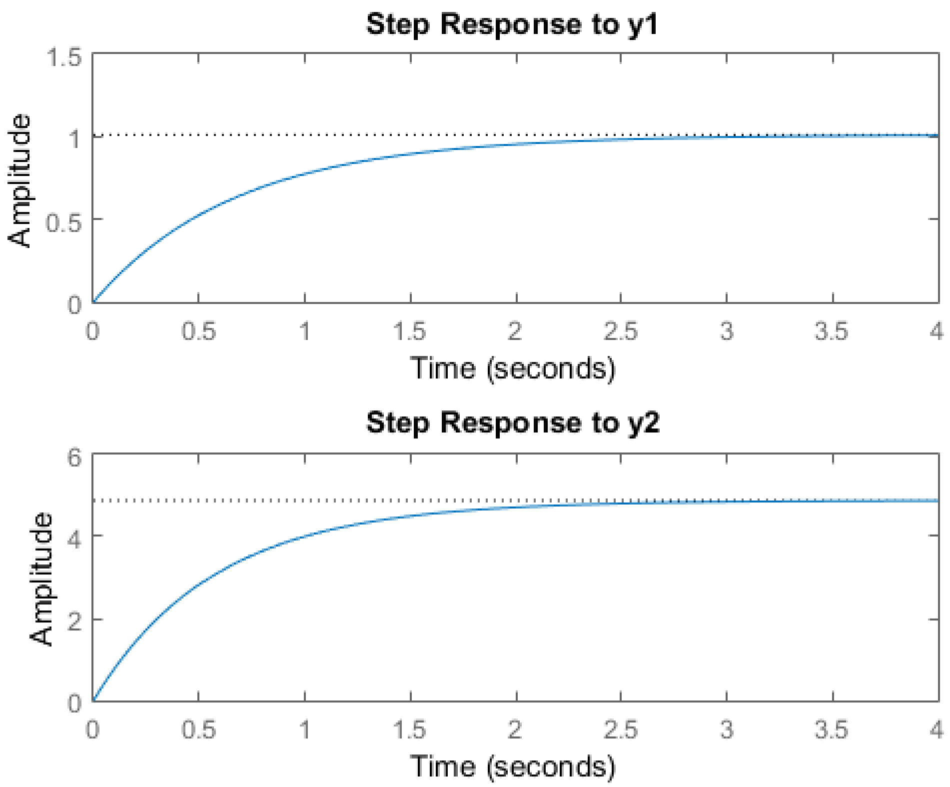
صفرهای عنصر : {-1.898 و -1.7 و -2.037 و -1.44}

صفرهای انتقال : {-1.8835 و -1.3361}

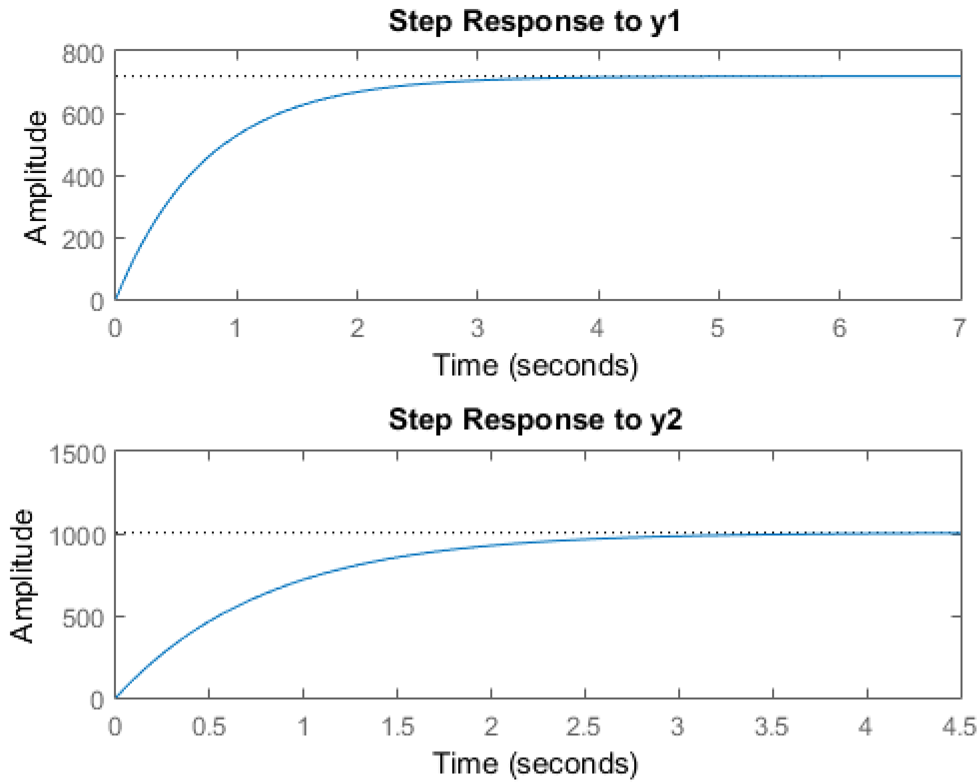
قطب ها : { -1.89 و -1.33 و -1.89 و -1.33 }

سیستم حلقه باز پایدار می باشد و سیستم مینیمم فاز می باشد.

پاسخ حلقه باز به ورودی $u=[1\ 0]^T$:



پاسخ حلقه باز به ورودی $u=[0\ 1]^T$:

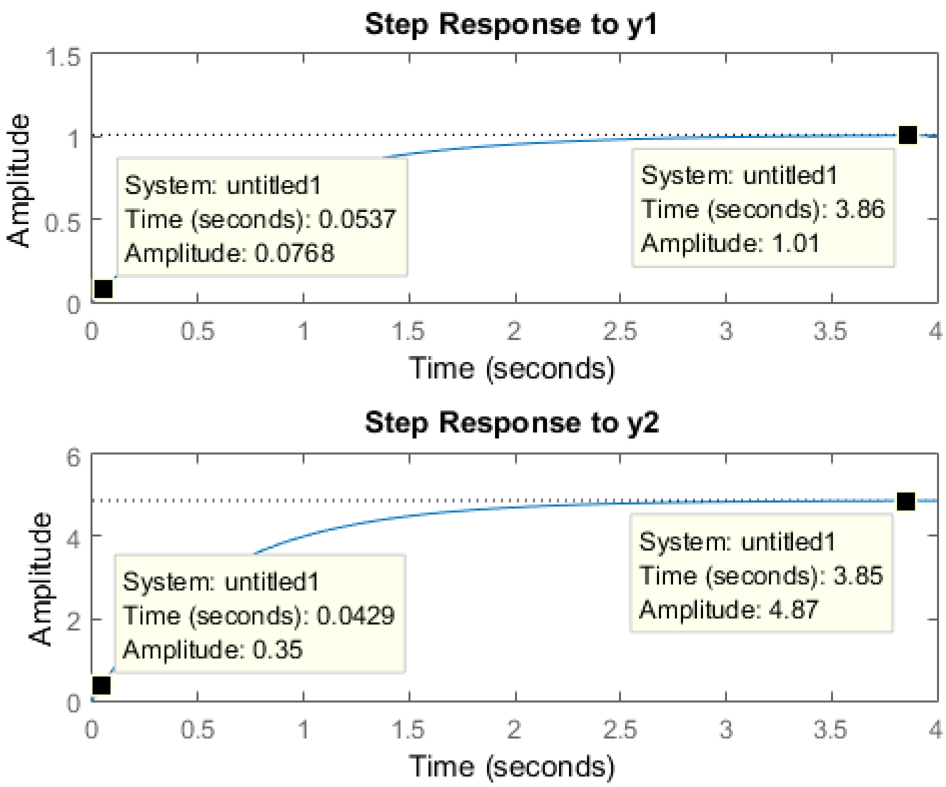


همانطور که از پاسخ سیستم حلقه باز دیده می شود و به شدت نا مطلوب بوده و تداخلها زیاد هستند. می‌توان متوجه شد که در کانال اول تداخل زیادی وجود دارد اما در کانال دوم خیر.

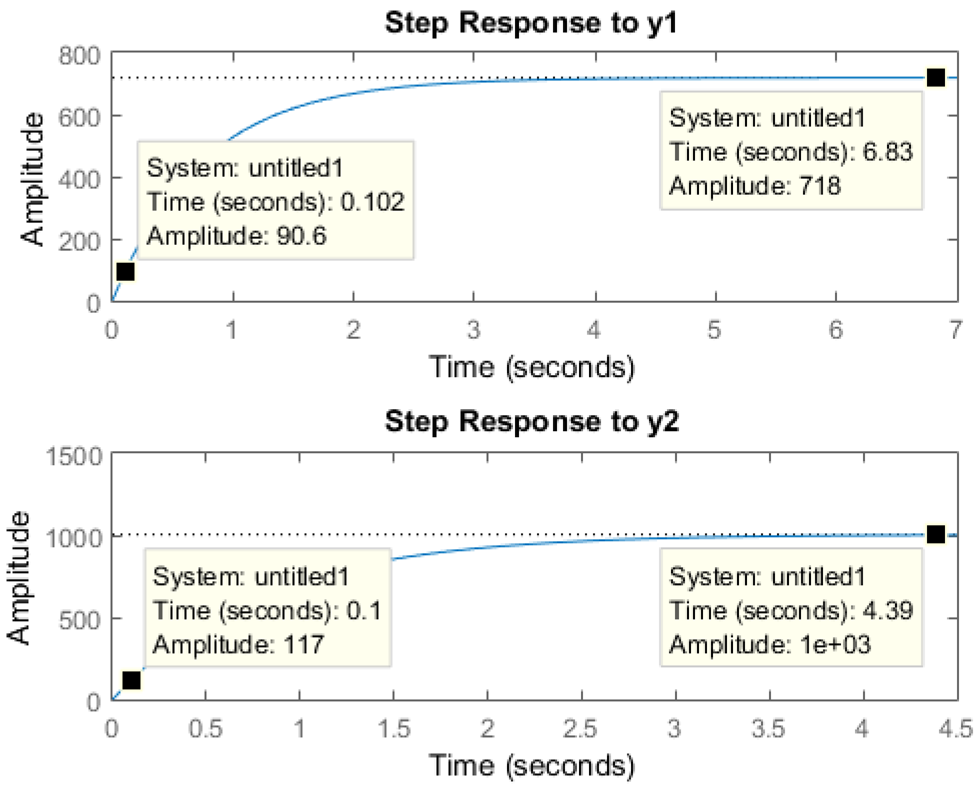
ب) استفاده از دو راهکار برای طراحی PI :

ابتدا بدست آوردن ماتریس (CB) از روی مشتق پاسخ پله در $t=0^+$:

بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_1 :



بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_2 :



$$CB = [\dot{y}1 \quad \dot{y}2][u1 \quad u2]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.4 & 906 \\ 8.75 & 1170 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.4 & 906 \\ 8.75 & 1170 \end{bmatrix}$$

بدست آوردن ماتریس پاسخ حالت ماندگار با توجه به شکل

$$G(0) = \begin{bmatrix} 1.01 & 718.5 \\ 4.87 & 1003 \end{bmatrix}$$

حال پس از بدست آوردن تمامی موارد مورد نیاز از روی پاسخ پله حلقه باز به طراحی PI می پردازیم :

راهکار اول :

ابتدا باید منظم بودن سیستم را چک نماییم :

$$|CB| = -6289.5 \neq 0$$

پس سیستم منظم است و CB رتبه کامل می باشد.

طراحی ضرایب PI :

$$K1 = (CB)^{-1} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1860 & 0.1440 \\ 0.0014 & -0.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix}$$

$$K2 = G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -0.4034 & 0.2890 \\ 0.002 & -0.0004 \end{bmatrix}$$

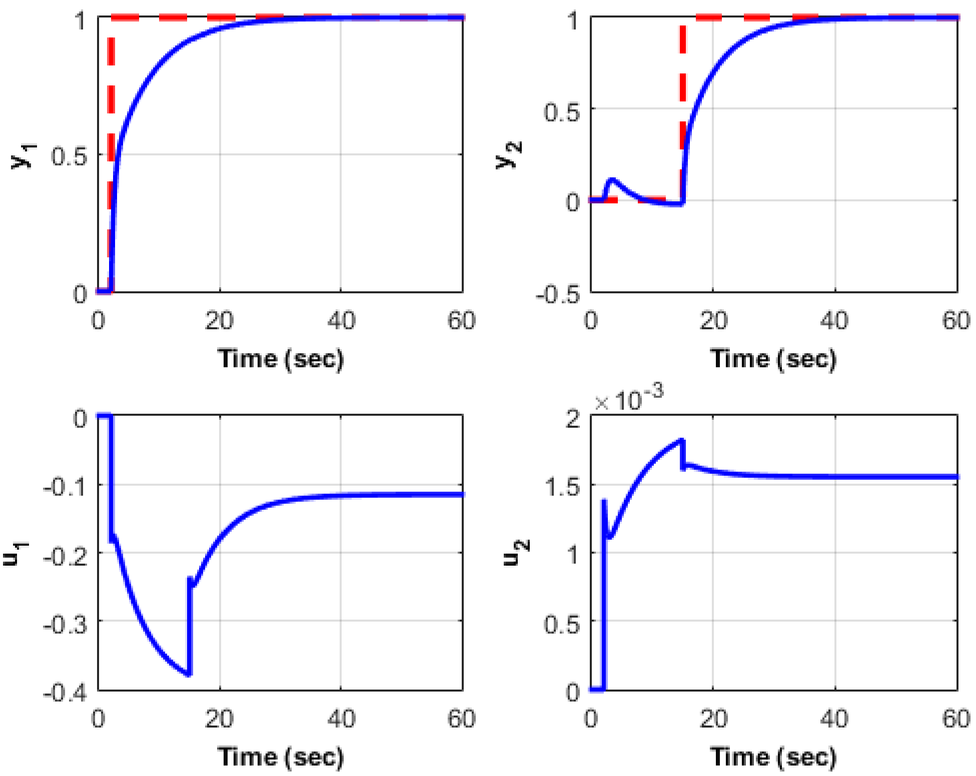
پس داریم:

$$PI = K1 + \frac{\varepsilon K2}{s}$$

پس به کمک مقادیر پارامترهای تنظیم به صورت زیر :

$$k1 = k2 = 1 \quad , \varepsilon = 0.5$$

پاسخ سیستم حلقه بسته شامل خروجی ها و فرمان های کنترلی در سیمولینک شبیه سازی و با توجه به کد کتاب رسم شده اند ورودی اول مرجع پله در زمان 2 ثانیه اعمال می شود و ورودی مرجع دوم پله در زمان 15 ثانیه اعمال می نماییم.



همانطور که در پاسخ ها مشاهده می گردد خروجی ها به خوبی ورودی های مرجع را دنبال نموده اند و اثر تداخل که زیاد به نظر می رسید از بین رفته تقریبا و فرمان های کنترلی نیز مقادیر قابل قبولی دارند.

تغییر پارامتر ε : هر چه ε را افزایش می دهیم در پاسخ ها متوجه می شدیم سیستم نوسانی تر و در عین حال سرعتر می گشت و اگر مقدار آن را خیلی کم می نمودیم خطای حالت ماندگار داشتیم و سرعت پاسخ افت می نمود.

تغییر پارامترهای k1 و k2 : با افزایش این پارامترها پاسخ ها سریعتر می گشت

راهکار دوم :

در راهکار دوم داریم:

$$u(t) = \alpha\varepsilon K e(t) + \varepsilon K z(t)$$

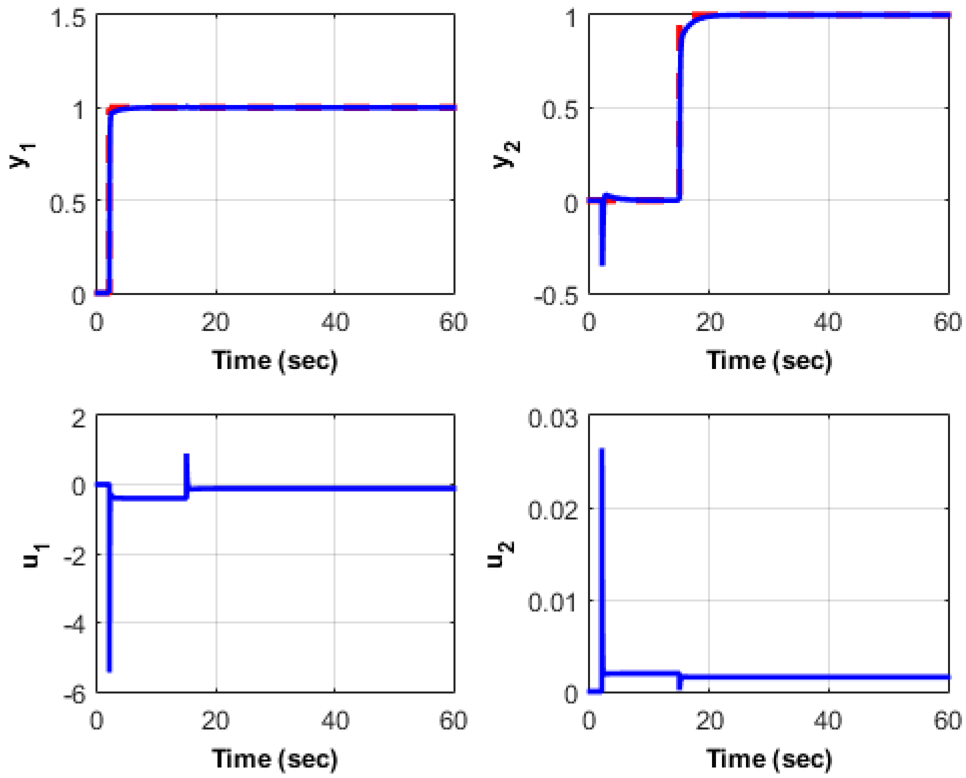
$$PI = \alpha\varepsilon K + \frac{\varepsilon K}{s}$$

$$K = G^T(GG^T)^{-1}\Sigma$$

پس مقادیر را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 1.5\,, \quad \varepsilon = 3\,, \qquad K = G^T(GG^T)^{-1}\Sigma = \begin{bmatrix} -0.8069 & 0.2890 \\ 0.0039 & -0.0004 \end{bmatrix}$$

پاسخ سیستم حلقه بسته شامل خروجی ها و فرمان های کنترلی در سیمولینک شبیه سازی و با توجه به کد کتاب رسم شده اند ورودی اول مرجع پله در زمان 2 ثانیه اعمال می شود و ورودی مرجع دوم پله در زمان 15 ثانیه اعمال می نماییم.



همانطور که در پاسخ ها مشاهده می گردد خروجی ها به خوبی ورودی های مرجع را دنبال نموده اند و در عین حال در پاسخ خروجی دوم زمانی که ورودی اول را وارد نموده ایم در ثانیه دوم فروجهش 0.25- را مشاهده می نماییم ولی فرمان کنترلی بزرگتری داریم.

تغییر پارامتر ε : هر چه ε را افزایش می دهیم در پاسخ ها متوجه می شدیم سیستم سریعتر و در عین حال فرمان کنترلی افزایش می یابد و اگر کمتر نماییم پاسخ با سرعت کمتر به مقدار نهایی می رسد. و در عین حال فرمان کنترلی کمتر است

تغییر پارامترα: با افزایش این پارامترها پاسخ ها سریعتر و در عین حال نوسانی تر شده و کاهش آن موجب کاهش سرعت است

تغییر در پارامترهای Σ : با توجه به اینکه به کمک این پارامتر محل قطب های حلقه بسته تعیین می شود پس با افزایش آن سرعت سیستم بالاتر می رود و قطب های حلقه بسته در مکان دورتری از محور قرار می گیرد.

ج) در کل پاسخ ها نسبت به طراحی قبلی(اول) بسیار سریعتر و مطلوب تر گردیده اند اما با مشاهده فرمان های کنترلی متوجه میشویم از حالت قبل بزرگتر می باشند که این یعنی برای داشتن پاسخ بهتر باید هزینه کنترلی بیشتری را استفاده کنیم(فرمان کنترلی بزرگتر)

جواب سوال 2- 8)

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{-0.54}{85s+1} & \frac{0.52}{85s+1}\\ \frac{1}{170s+1} & \frac{1}{170s+1}\end{bmatrix}$$

الف) بررسی مشخصه ها و پاسخ حلقه باز سیستم :

بدست آوردن فرم اسمیث مک میلان :

$$D0=1\,, D1=1\,, D2=-1.06(85s+1)(170s+1)$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(85s+1)(170s+1)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

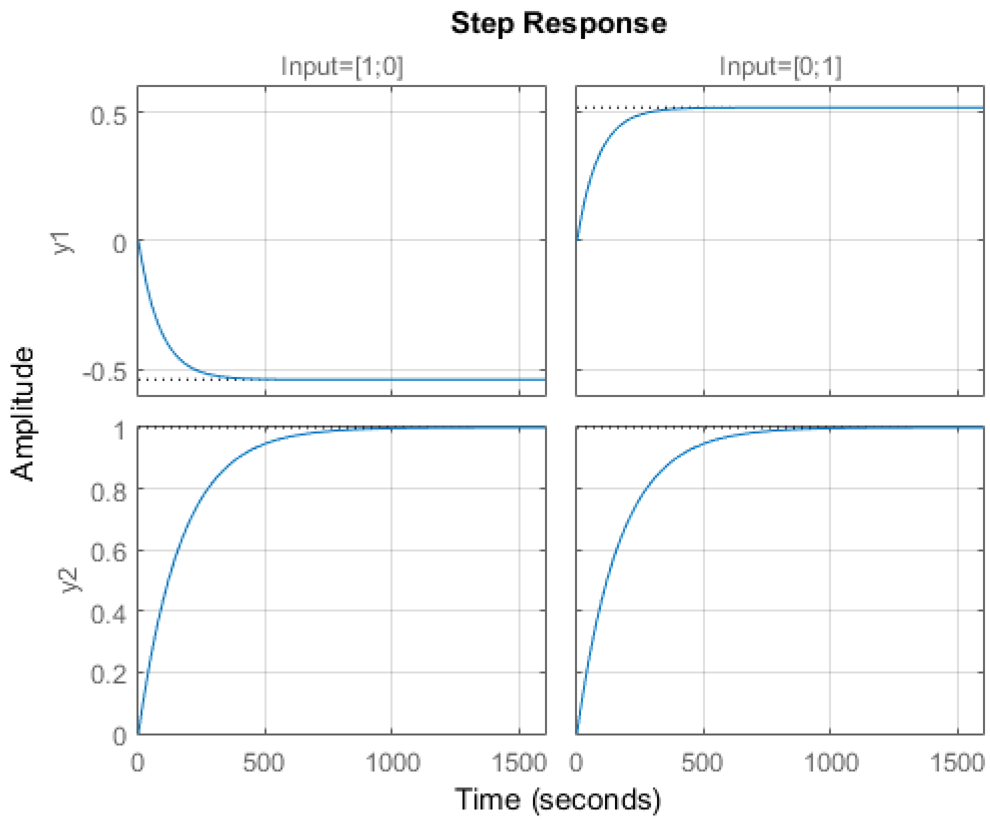
صفر عنصر : ندارد

صفرهای انتقال : {ندارد}

قطب ها : {-1/85= -0.017 و -1/170= -0.006}

سیستم حلقه باز پایدار می باشد و سیستم مینیمم فاز می باشد.

پاسخ حلقه باز به ورودی پله :

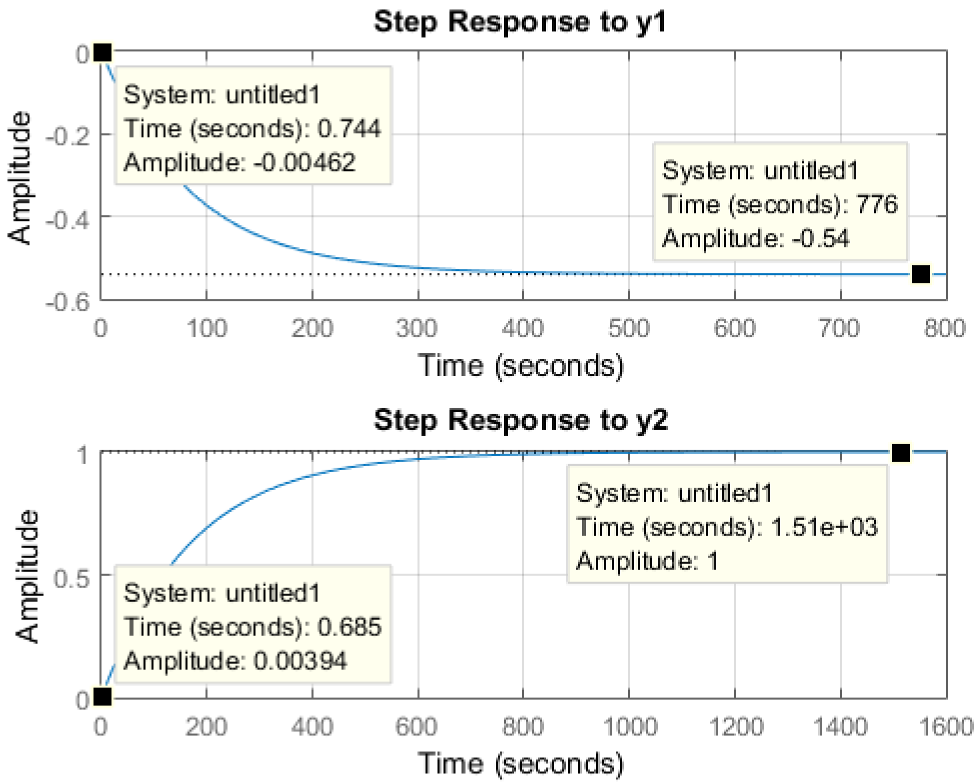


همانطور که از پاسخ سیستم حلقه باز دیده می شود و نامطلوب بوده و تداخلها زیاد هستند. همچنین خروجی اول اصلا ورودی را دنبال نمی کند . همچنین سیستم نیز کند و لخت می باشد.

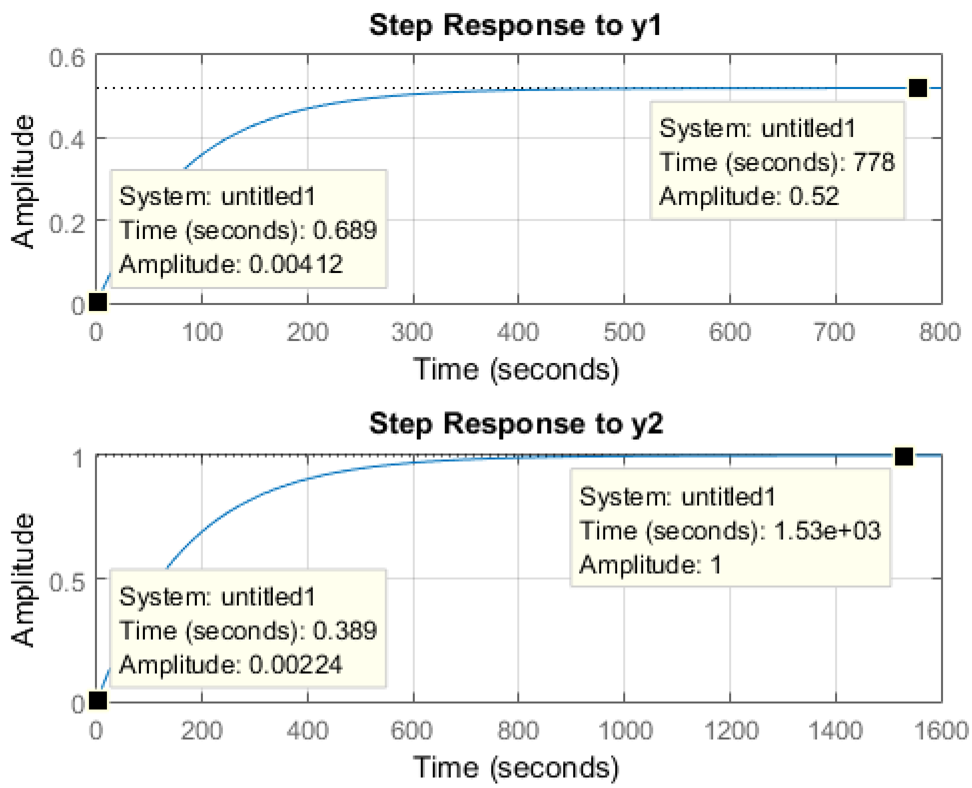
ب) استفاده از دو راهکار برای طراحی PI :

ابتدا بدست آوردن ماتریس (CB) از روی مشتق پاسخ پله در $t=0^+$:

بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_1 :



بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_2 :



$$CB = [\dot{y}1 \quad \dot{y}2][u1 \quad u2]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.006 & 0.006 \\ 0.0057 & 0.0057 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.006 & 0.006 \\ 0.0057 & 0.0057 \end{bmatrix}$$

بدست آوردن ماتریس پاسخ حالت ماندگار با توجه به شکل

$$G(0) = \begin{bmatrix} -0.54 & 0.52 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال پس از بدست آوردن تمامی موارد مورد نیاز از روی پاسخ پله حلقه باز به طراحی PI می پردازیم :

راهکار اول :

ابتدا باید منظم بودن سیستم را چک نماییم :

$$|CB| = -0.0000684 \neq 0$$

پس سیستم منظم است و CB رتبه کامل می باشد.

طراحی ضرایب PI :

$$K1 = (CB)^{-1} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83.33 & 87.72 \\ 83.33 & 87.72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix}$$

$$K2 = G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -0.94 & 0.49 \\ 0.94 & 0.51 \end{bmatrix}$$

پس داریم:

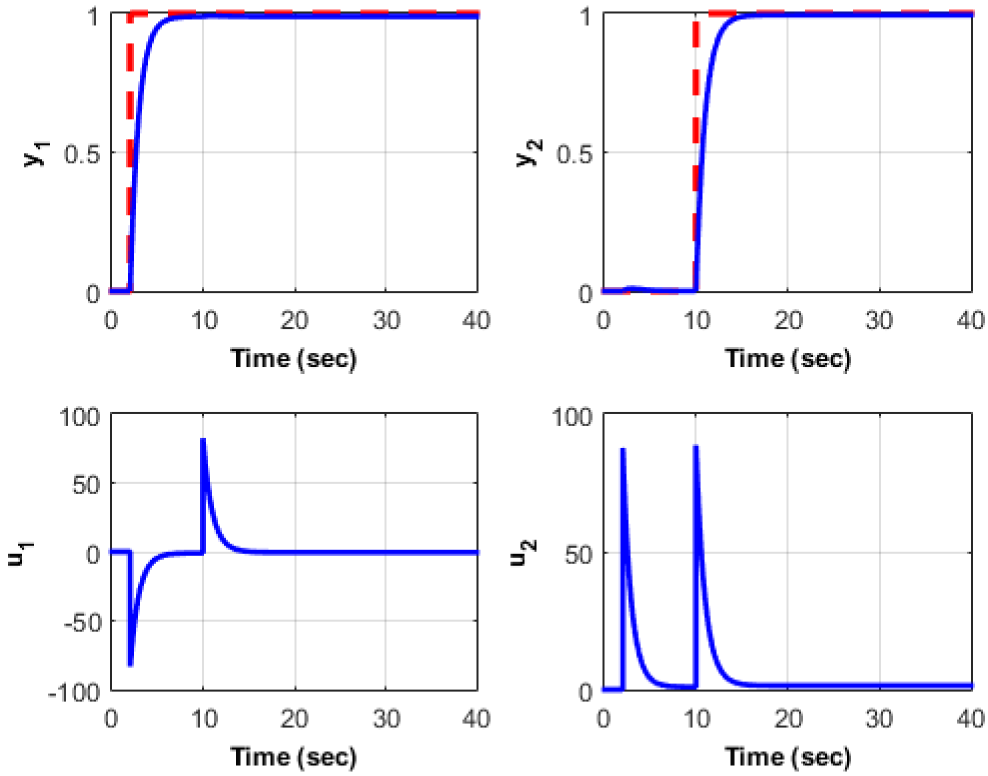
$$PI = K1 + \frac{\varepsilon K2}{s}$$

پس به کمک مقادیر پارامترهای تنطیم به صورت زیر :

$$k1 = k2 = 1 \quad , \varepsilon = 0.5$$

پاسخ سیستم حلقه بسته شامل خروجی ها و فرمان های کنترلی در سیمولینک شبیه سازی و با توجه به کد کتاب رسم شده اند

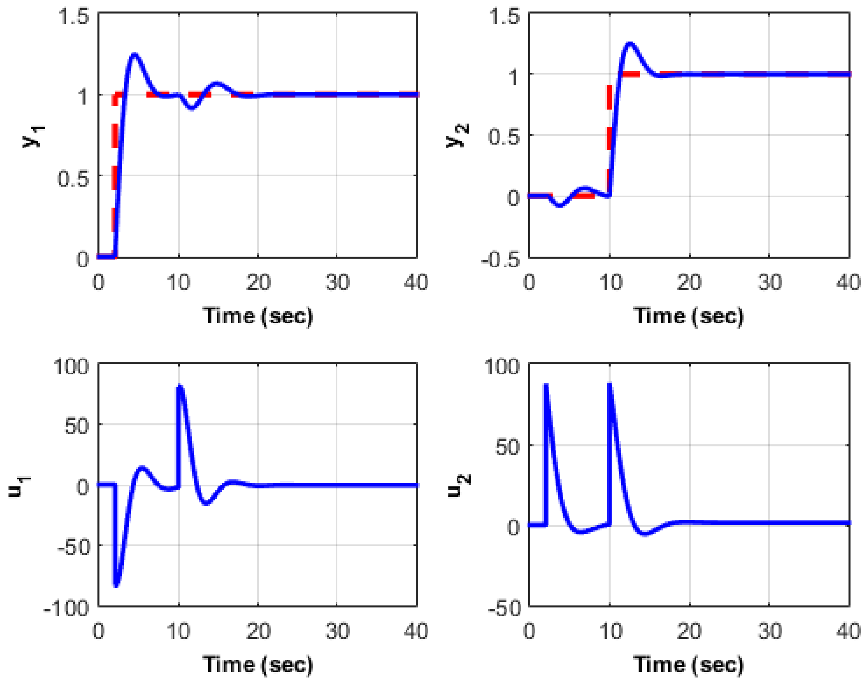
ورودی اول مرجع پله در زمان 2 ثانیه اعمال می شود و ورودی مرجع دوم پله در زمان 10 ثانیه اعمال می نماییم.



همانطور که در پاسخ ها مشاهده می گردد خروجی ها به خوبی ورودی های مرجع را دنبال نموده اند و اثر تداخل که زیاد به نظر می رسید از بین رفته تقریبا و فرمان های کنترلی نیز مقادیر قابل قبولی دارند.

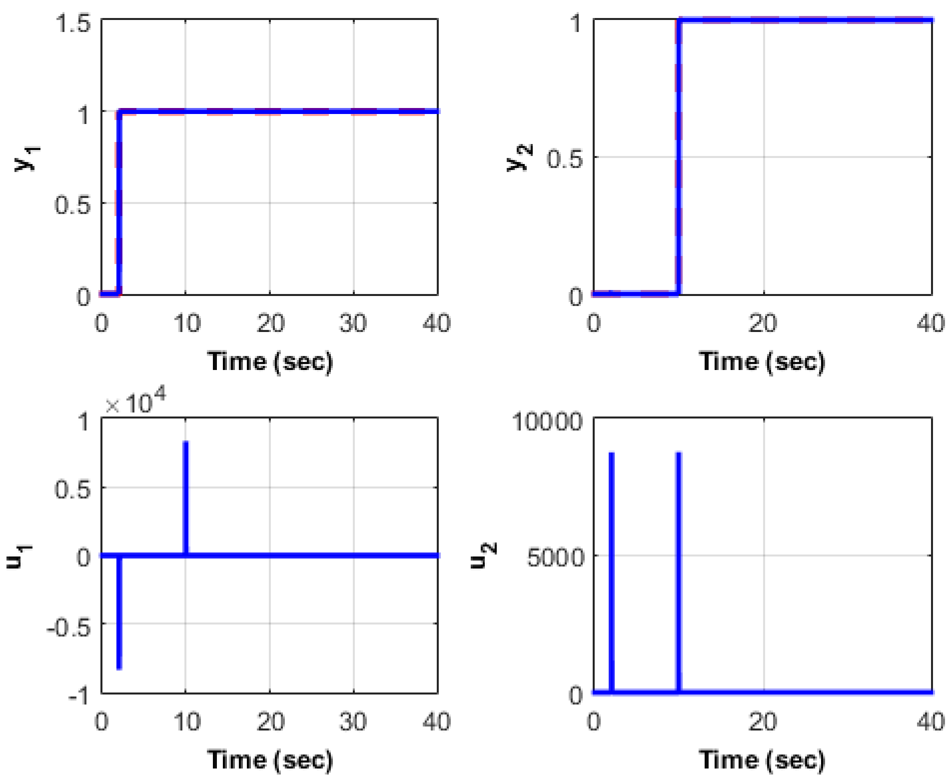
تغییر پارامتر ε : هر چه ε را افزایش می دهیم در پاسخ ها متوجه می شدیم سیستم نوسانی تر و در عین حال سریعتر می گردد و اگر مقدار آن را خیلی کم می نمودیم خطای حالت ماندگار داشتیم و سرعت پاسخ افت می نمود.

تأثیر افزایش ε :



تغییر پارامترهای k1 و k2 : با افزایش این پارامترها پاسخ ها سریعتر می گردد ولی در عین حال فرمان های کنترلی رو به اشباع می روند .

تأثیر افزایش k1 و k2



راهکار دوم :

در راهکار دوم داریم:

$$u(t) = \alpha\varepsilon Ke(t) + \varepsilon Kz(t)$$

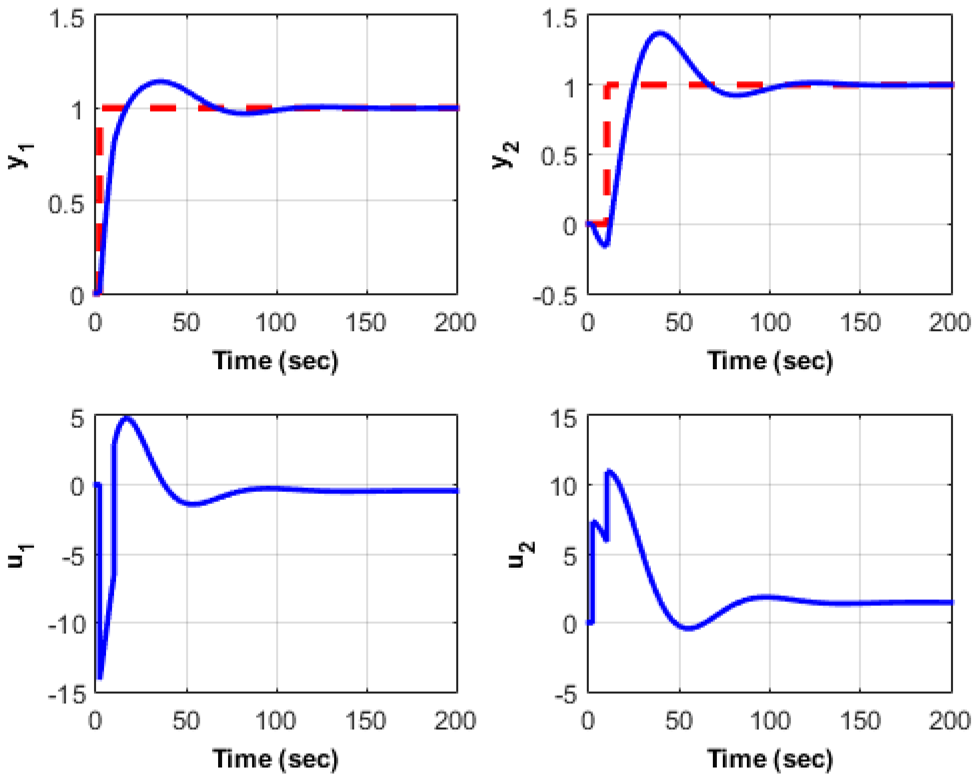
$$PI = \alpha\varepsilon K + \frac{\varepsilon K}{s}$$

$$K = G^T(GG^T)^{-1}\Sigma$$

پس مقادیر را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 10, \quad \varepsilon = 0.5, \quad K = G^T(GG^T)^{-1}\Sigma = \begin{bmatrix} -2.8302 & 9.4340 \\ 1.4717 & 5.0943 \end{bmatrix}$$

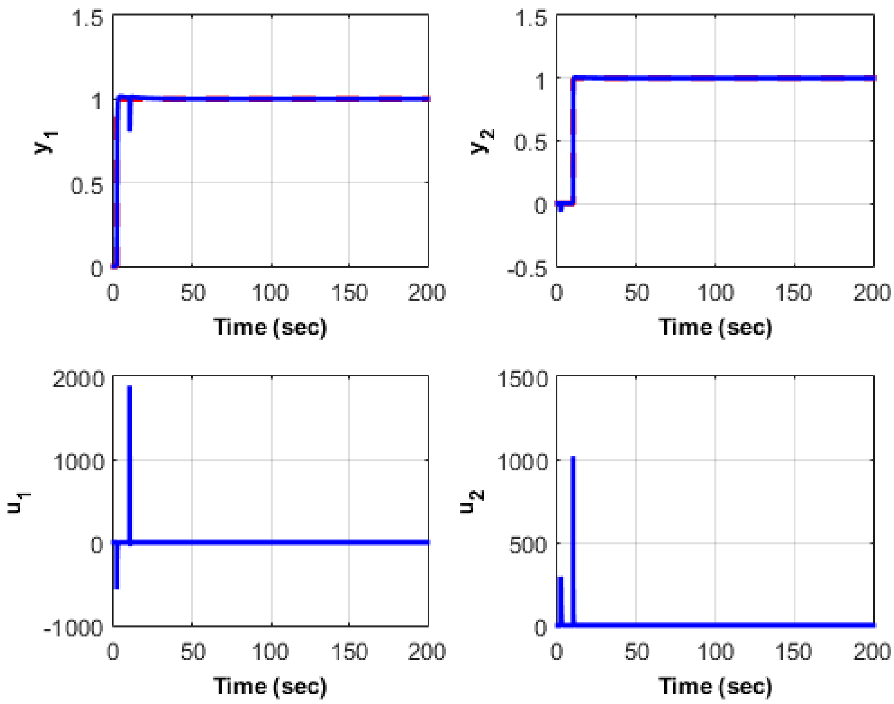
پاسخ سیستم حلقه بسته شامل خروجی ها و فرمان های کنترلی در سیمولینک شبیه سازی و با توجه به کد کتاب رسم شده اند ورودی اول مرجع پله در زمان 2 ثانیه اعمال می شود و ورودی مرجع دوم پله در زمان 10 ثانیه اعمال می نماییم.



همانطور که در پاسخ ها مشاهده می گردد خروجی ها به خوبی ورودی های مرجع را دنبال نموده اند و در عین حال در پاسخ خروجی دوم زمانی که ورودی اول را وارد نموده ایم در ثانیه دوم فروجهش کمی را مشاهده می نماییم ولی فرمان کنترلی خیلی مناسب می باشد و ازحالت قبل کمتر می باشد.

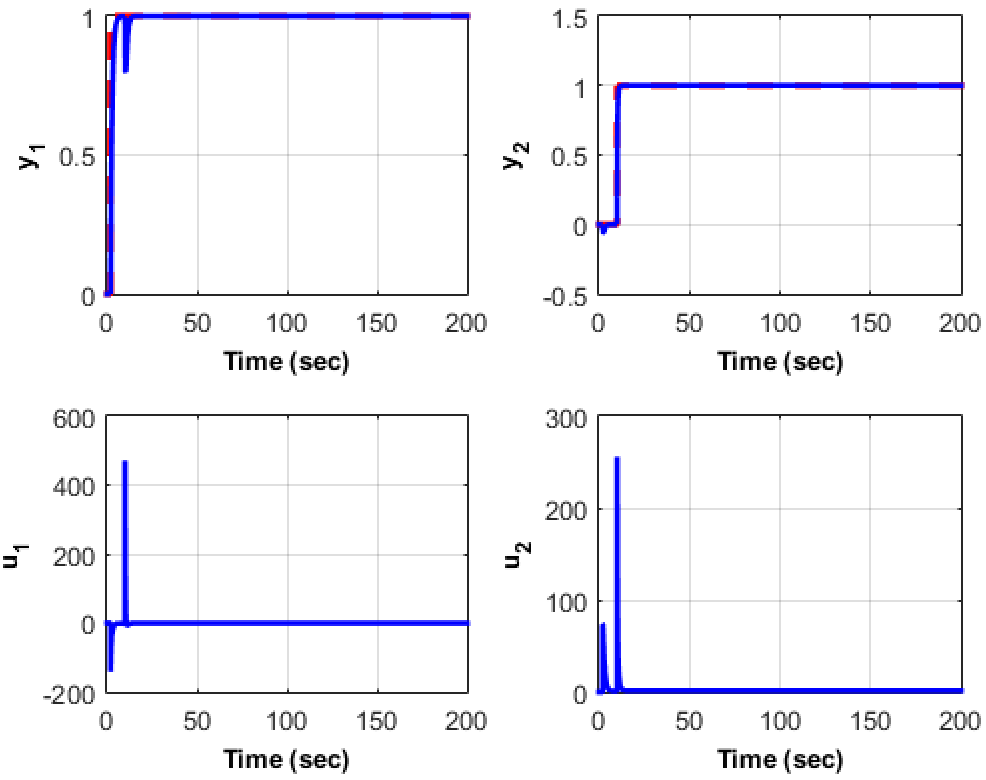
تغییر پارامتر ε : هر چه ε را افزایش می دهیم در پاسخ ها متوجه می شدیم سیستم سریعتر و در عین حال فرمان کنترلی افزایش می یابد و اگر کمتر نماییم پاسخ با سرعت کمتر و در عین حال فرمان کنترلی کمتر به می شود.

تأثیر افزایش ε



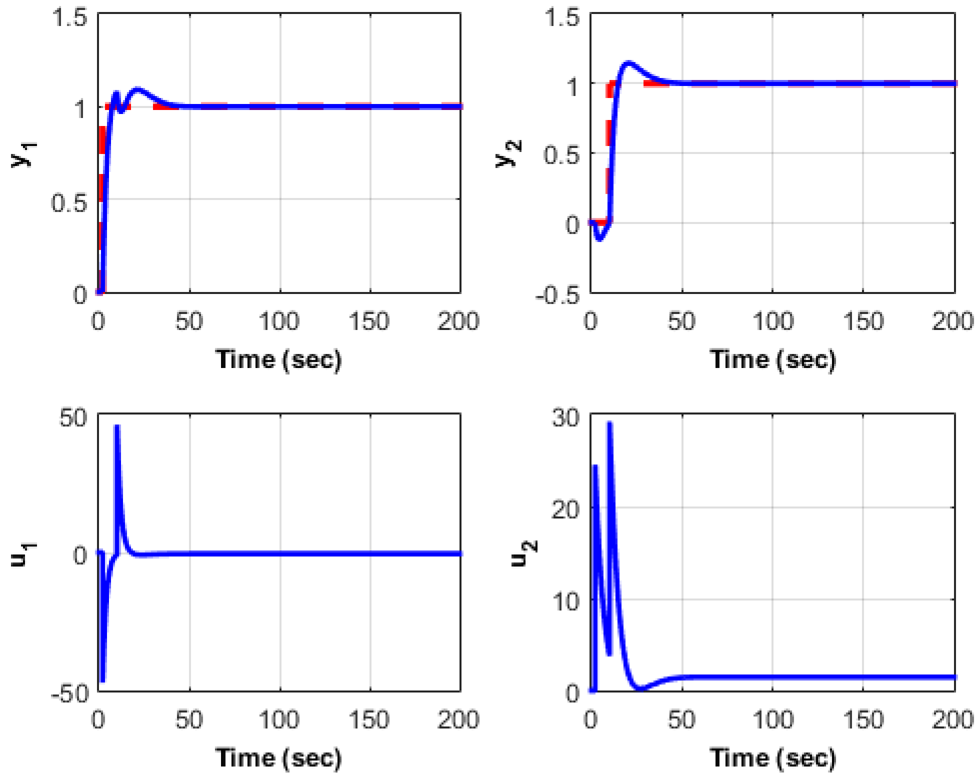
تغییر پارامترα: با افزایش این پارامترها پاسخ ها سریعتر و فراجهش کم می شود و در عین حال فرمان کنترلی بالاتر و کاهش آن موجب کاهش سرعت

تأثیر افزایش α



تغییر در پارامترهای Σ : با توجه به اینکه به کمک این پارامتر محل قطب های حلقه بسته تعیین می شود پس با افزایش آن سرعت سیستم بالاتر می رود و قطب های حلقه بسته در مکان دورتری از محور قرار می گیرد.

تأثیر افزایش Σ

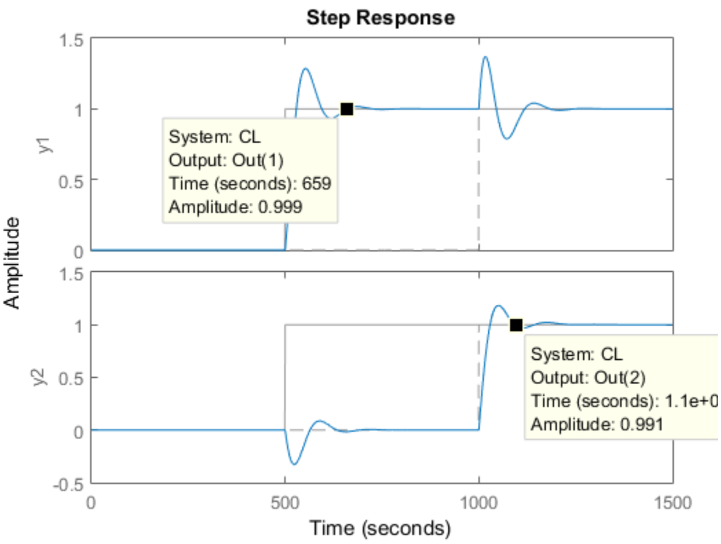


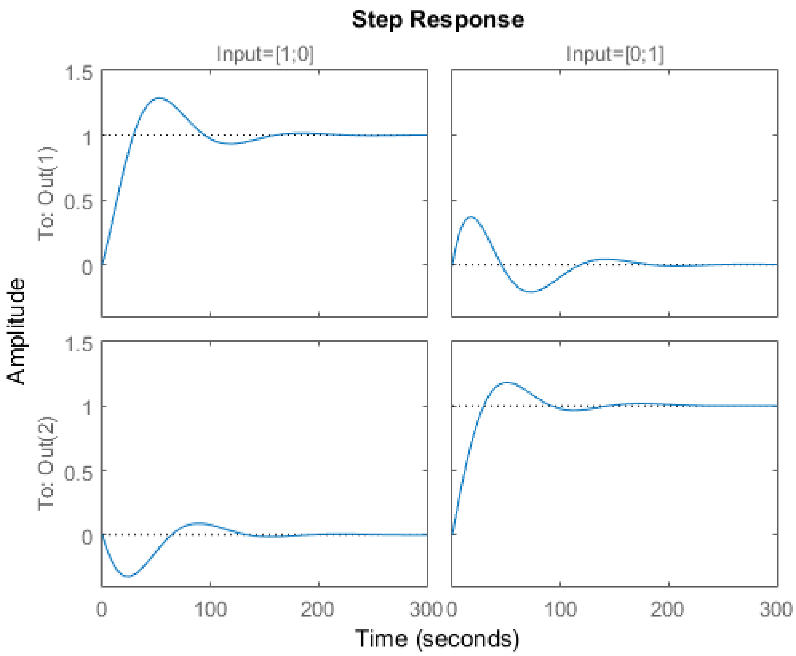
ج) در کل پاسخ ها در طراحی اول سریع تر و فراجهش کمتر می باشند ولی در طراحی دوم پاسخ ها کندتر و با فراجهش و فروجهش بیشتری می باشد ولی در عین حال از نظر فرمان کنترلی طراحی دوم مناسب تر می باشد چون هر چه پاسخ سریعتر باشد هزینه کنترلی آن بیشتر است.

مقایسه با PI غیرمتمرکز :

$$PI_{Decentrelized} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \frac{1}{s}\begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

پاسخ حلقه بسته به کنترل کننده قطری :





همانطور که از پاسخ ها مشاهده می شود که پاسخ در حالت PI غیر مترکز کندتر و فراجهش و فروجهش آن بیشتر می باشد نسبت هر دو طراحی فبلی که از روی پاسخ پله حلقه باز طراحی شدند همچنین دو طراحی قبلی از نظر حداقل نمودن اثر تداخل نیز از PI غیرمتمرکز بهتر عمل کردند .

جواب سوال 3- 8) سوال امتیازی

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-400\, s \,-\, 2638}{s^3 + 145.4\, s^2 + 3571\, s + 2.124e04} & \dfrac{77.7\, s + 1211}{s^2 + 125.4\, s + 1061} \\ \dfrac{959000}{s^3 + 145.4\, s^2 + 3571\, s + 2.124e04} & \dfrac{3279\, s + 8751}{s^2 + 125.4\, s + 1061} \end{bmatrix}$$

الف) بررسی مشخصه ها و پاسخ حلقه باز سیستم :

بدست آوردن صفر و قطب ها از فرم اسمیث مک میلان :

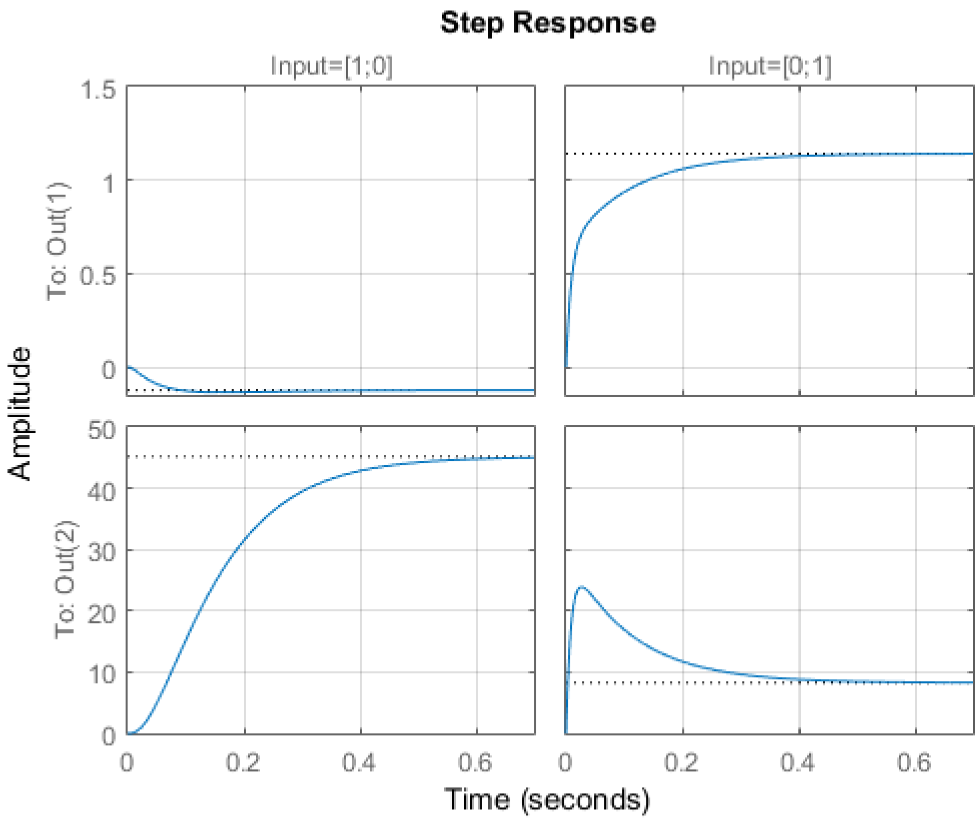
صفر عنصر : ندارد

صفرهای انتقال : {-19.31 و -46.7655}

قطب ها : {-9.125 و -116.2750 و -9.1249 و -20.0152 و -116.2749}

سیستم حلقه باز پایدار می باشد و سیستم مینیمم فاز می باشد.

پاسخ حلقه باز به ورودی پله :

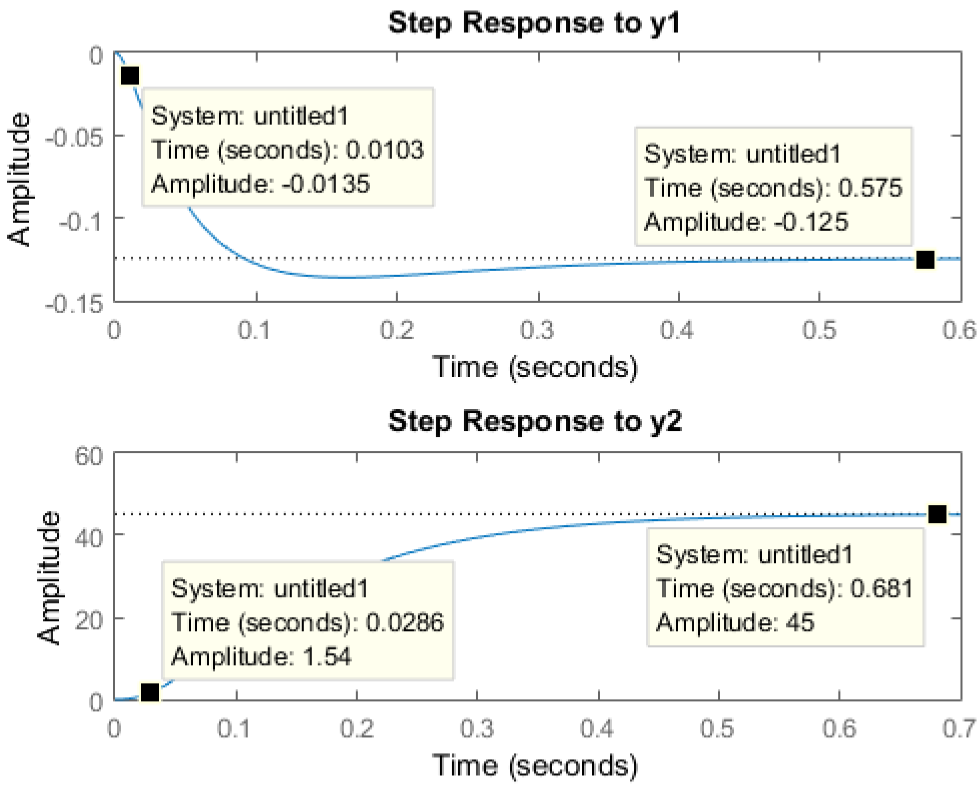


همانطور که از پاسخ سیستم حلقه باز دیده می شود و نامطلوب بوده و تداخلها به خصوص در کانال دوم زیاد هستند. همچنین خروجی اول اصلا ورودی را دنبال نمی کند . همچنین خروجی دوم خطای حالت ماندگار بزرگی دارد.

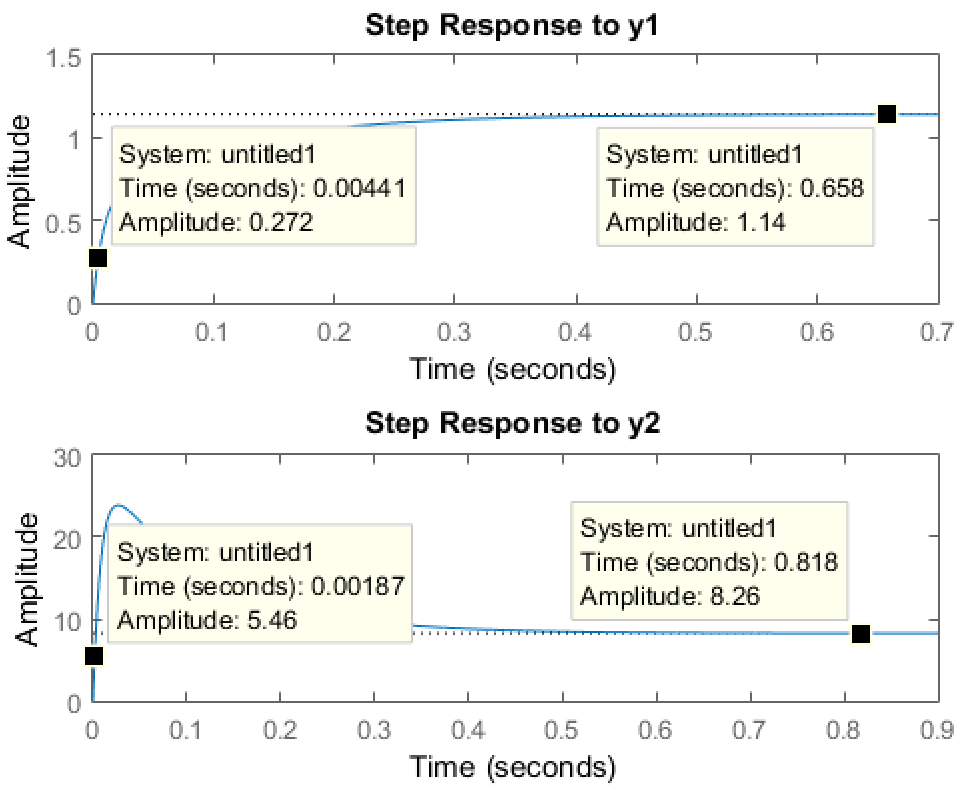
ب) استفاده از دو راهکار برای طراحی PI :

ابتدا بدست آوردن ماتریس (CB) از روی مشتق پاسخ پله در $t=0^+$:

بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_1 :



بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_2 :



$$CB = [\dot{y}1 \quad \dot{y}2][u1 \quad u2]^{-1} = \begin{bmatrix} -1.31 & 61.68 \\ 53.84 & 2919.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1.31 & 61.68 \\ 53.84 & 2919.78 \end{bmatrix}$$

بدست آوردن ماتریس پاسخ حالت ماندگار با توجه به شکل

$$G(0) = \begin{bmatrix} -0.125 & 1.14 \\ 45 & 8.26 \end{bmatrix}$$

حال پس از بدست آوردن تمامی موارد مورد نیاز از روی پاسخ پله حلقه باز به طراحی PI می پردازیم :

راهکار اول :

ابتدا باید منظم بودن سیستم را چک نماییم :

$$|CB| = -7145.763 \neq 0$$

پس سیستم منظم است و CB رتبه کامل می باشد.

طراحی ضرایب PI :

$$K1 = (CB)^{-1} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4086 & 0.0086 \\ 0.0075 & 0.0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix}$$

$$K2 = G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -0.1578 & 0.0218 \\ 0.8599 & 0.0024 \end{bmatrix}$$

پس داریم:

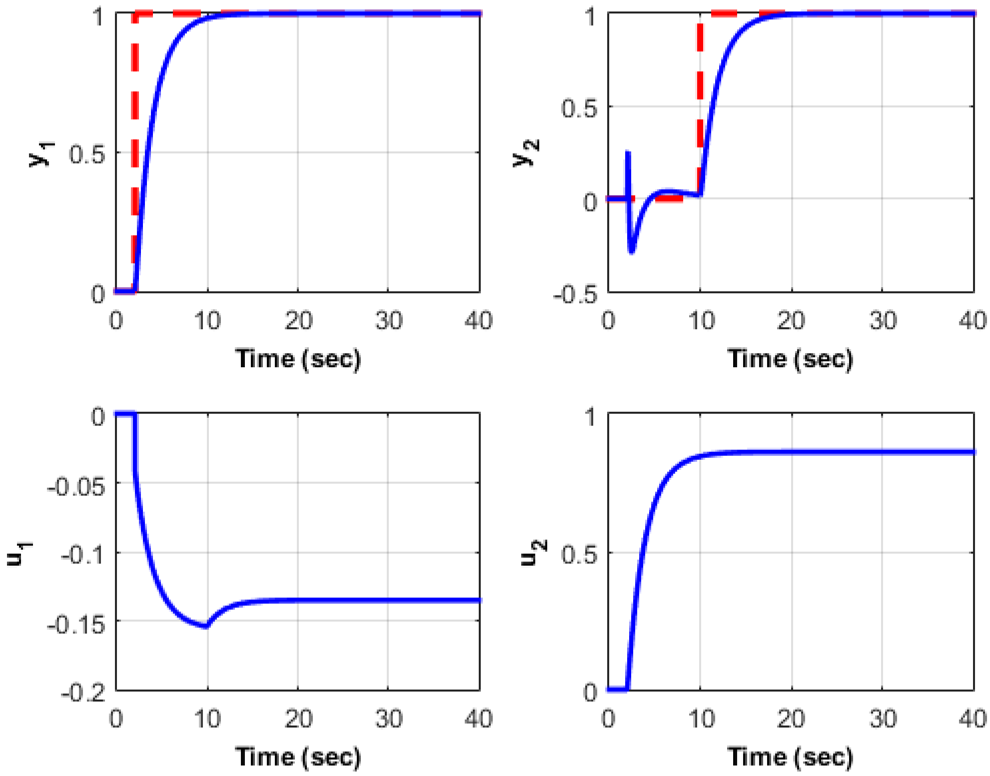
$$PI = K1 + \frac{\varepsilon K2}{s}$$

پس به کمک مقادیر پارامترهای تنطیم به صورت زیر :

$$k1 = k2 = 0.1 \quad , \varepsilon = 0.5$$

پاسخ سیستم حلقه بسته شامل خروجی ها و فرمان های کنترلی در سیمولینک شبیه سازی و با توجه به کد کتاب رسم شده اند

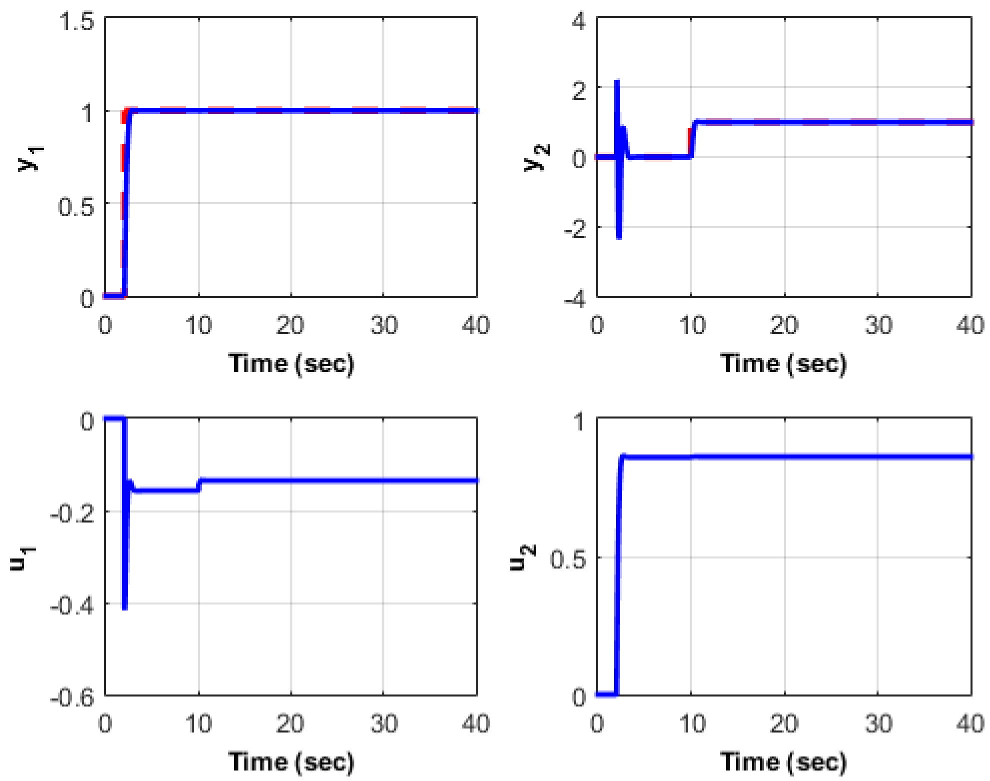
ورودی اول مرجع پله در زمان 2 ثانیه اعمال می شود و ورودی مرجع دوم پله در زمان 10 ثانیه اعمال می نماییم.



همانطور که در پاسخ ها مشاهده می گردد خروجی ها به خوبی ورودی های مرجع را دنبال نموده اند و اثر تداخل که زیاد به نظر می رسید از بین رفته تقریبا ولی مقدار کمی تداخل در y2 می بینیم و فرمان های کنترلی نیز مقادیر قابل قبولی دارند.

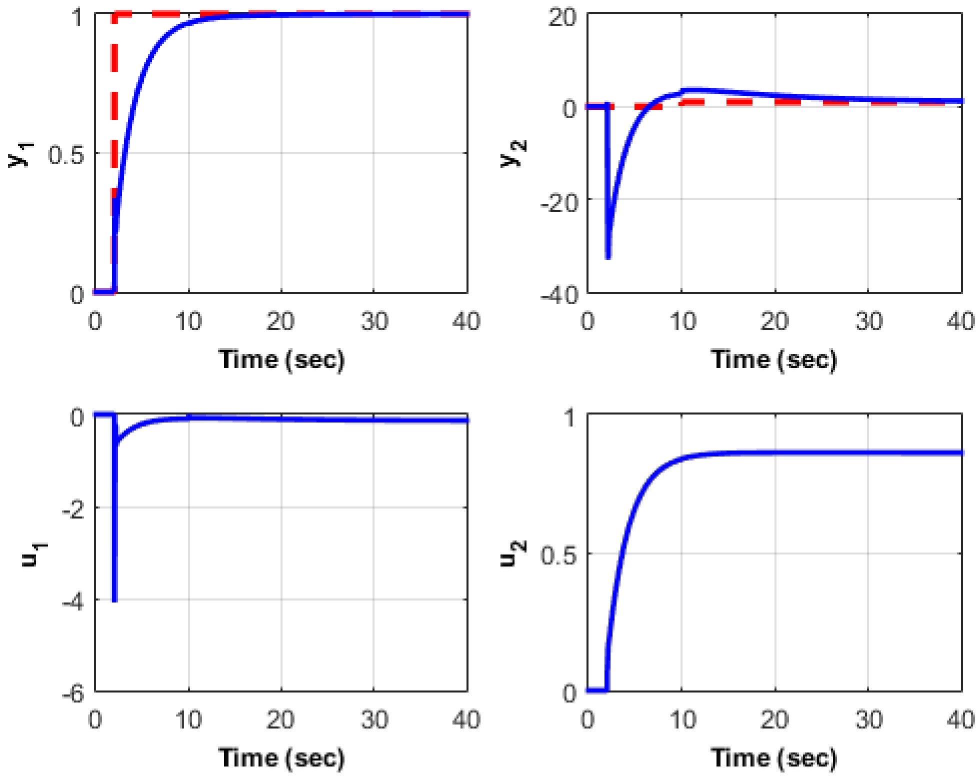
تغییر پارامتر ε : هر چه ε را افزایش می دهیم در پاسخ ها متوجه می شدیم سیستم سریعتر می گردد ولی اثر تداخل در y2 خیلی زیاد شده و فراجهشی در حد 220٪ دارد که مطلوب نیست و اگر ε را خیلی کم نماییم پاسخ به شدت کند شده و فروجهش بزرگی داریم.

تأثیر افزایش ε :



تغییر پارامترهای k1 و k2 : با افزایش این پارامترها پاسخ ها به نسبت قبل کندتر می گردد و در عین فروجهش ناشی از تداخل بسیار زیاد در حد 3000%- می گردد و اصلا مطلوب نیست

تأثیر افزایش k1 و k2



راهکار دوم :

در راهکار دوم داریم:

$$u(t) = \alpha\varepsilon K e(t) + \varepsilon K z(t)$$

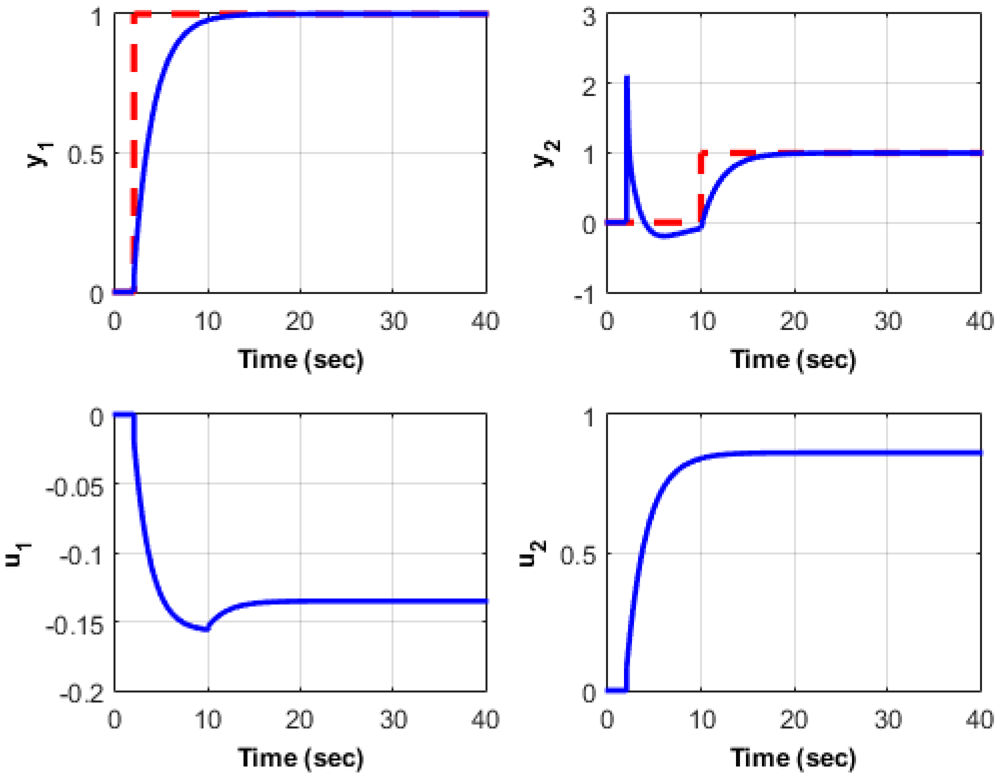
$$PI = \alpha\varepsilon K + \frac{\varepsilon K}{s}$$

$$K = G^T (GG^T)^{-1} \Sigma$$

پس مقادیر را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 0.2\,, \quad \varepsilon = 0.1\,, \qquad K = G^T (GG^T)^{-1} \Sigma = \begin{bmatrix} -0.7892 & 0.1089 \\ 4.2994 & 0.0119 \end{bmatrix}$$

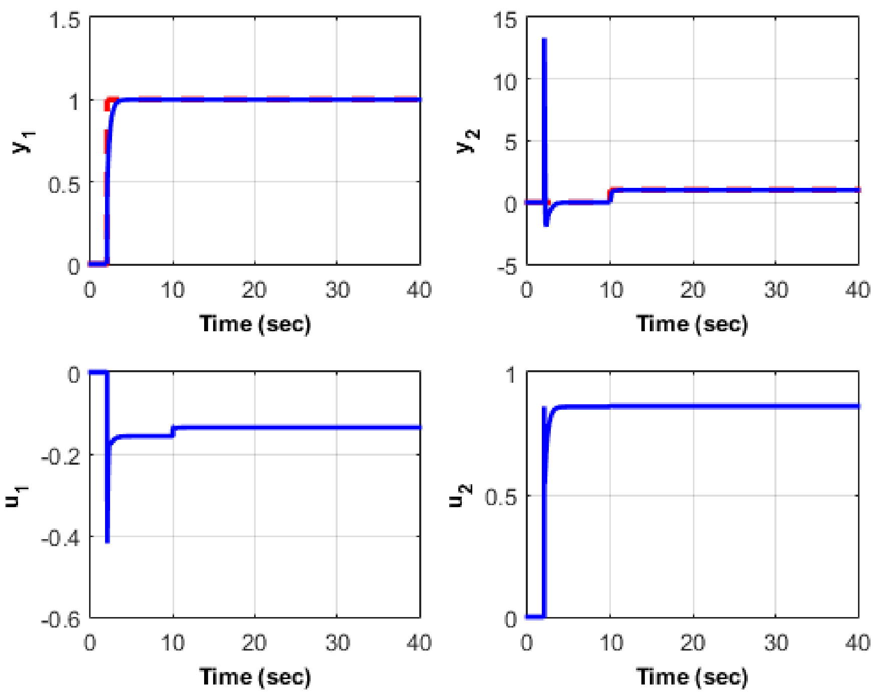
پاسخ سیستم حلقه بسته شامل خروجی ها و فرمان های کنترلی در سیمولینک شبیه سازی و با توجه به کد کتاب رسم شده اند ورودی اول مرجع پله در زمان 2 ثانیه اعمال می شود و ورودی مرجع دوم پله در زمان 10 ثانیه اعمال می نماییم.



همانطور که در پاسخ ها مشاهده می گردد خروجی ها به خوبی ورودی های مرجع را دنبال نموده اند و در عین حال در پاسخ خروجی دوم زمانی که ورودی اول را وارد نموده ایم در ثانیه دوم فراجهش زیادی را مشاهده می نماییم ولی فرمان کنترلی خیلی مناسب می باشد .

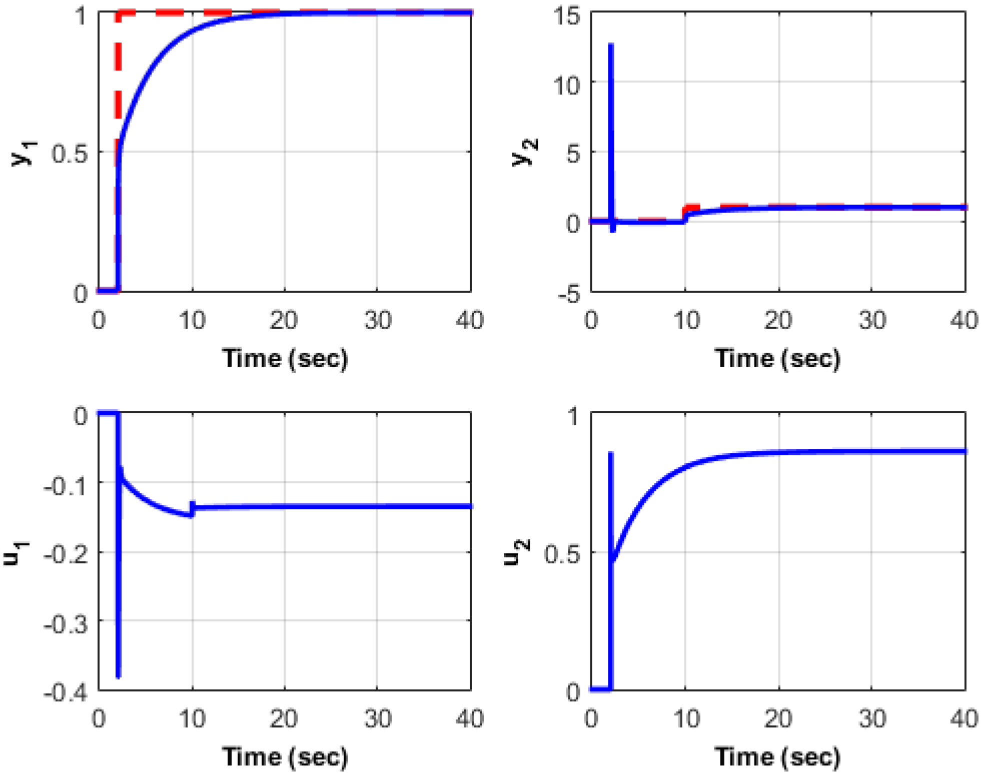
تغییر پارامتر ε : هر چه ε را افزایش می دهیم در پاسخ ها متوجه می شدیم سیستم سریعتر و در عین حال فراجهش ناشی از تداخل خیلی زیاد می گردد و این فراجهش به تغییرات ε بسیار حساس می باشد.

تأثیر افزایش ε



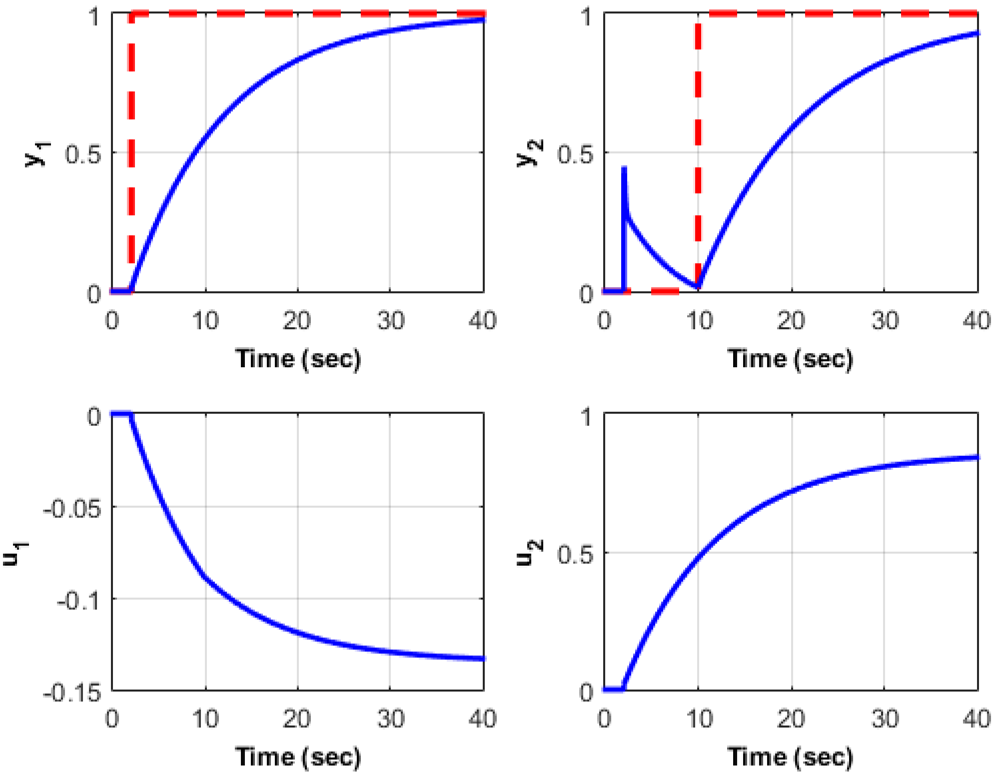
تغییر پارامترα: با افزایش این پارامترها پاسخ ها را به نسبت کندتر و فراجهش ناشی از تداخل را در کانال y2 بسیار زیاد می نماید. می شود .

تأثیر افزایش α



تغییر در پارامترهای Σ : با توجه به اینکه به کمک این پارامتر محل قطب های حلقه بسته تعیین می شود پس با افزایش آن سرعت سیستم بالاتر می رود و قطب های حلقه بسته در مکان دورتری از محور قرار می گیرد. و اگر کم کنیم سیستم به شدت کند می شود.

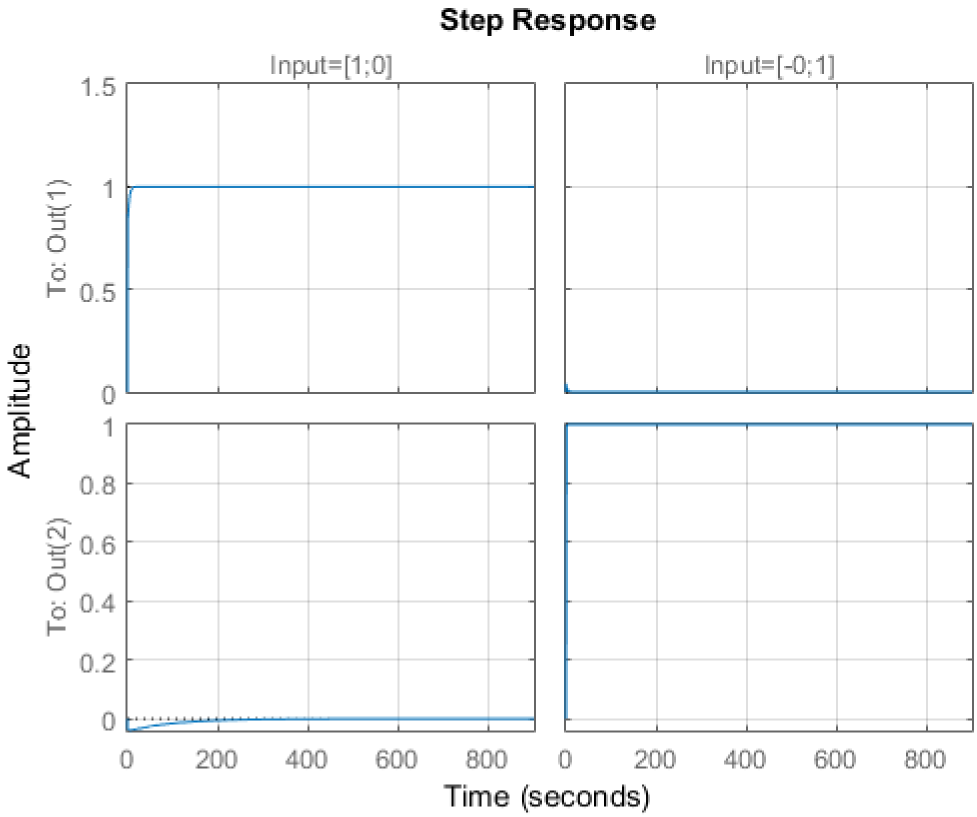
تأثیر کاهش Σ



ج) در کل پاسخ ها در طراحی دوم سریع تر و فراجهش کمتر می باشند ولی در طراحی اول پاسخ ها کندتر و با فراجهش بیشتری می باشد .

مقایسه با کنترلر PI غیرمتمرکز :

$$PI_{Decentrelized} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} + \frac{1}{s}\begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$



در این حالت متوجه می شویم پاسخ به کمک کنترلر PI غیرمتمرکز بسیار کند می باشد و استفاده از دو طراحی بالا به عملکرد بهتری منتج می شد و پاسخ های سریع تری داشتیم.

جواب سوال 8-4 : سوال امتیازی

ماتریس تابع تبدیل یک توربین گازی

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} k_{11}(s + \frac{1}{T_2}) & \frac{k_{12}\left(s+\frac{1}{T}\right)(s+\frac{1}{T_1})}{s+\frac{1}{\tau_4}} \\ k_{21}\left(s + \frac{1}{T_3}\right)(s + \frac{1}{T_4}) & \frac{k_{22}\left(s+\frac{1}{T_1}\right)n(s)}{s+\frac{1}{\tau_4}} \end{bmatrix}$$

$$d(s) = \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)(s^2 + 2\sigma_2 s + \sigma_2^2 + \omega_2^2)$$

$$n(s) = (s^2 + 2\sigma_1 s + \sigma_1^2 + \omega_1^2)$$

$$k_{11} = 0.12447, k_{12} = -0.02384, k_{21} = 0.07393, k_{22} = 0.07981$$

$$T_1 = -38.33, T_2 = 67.84, T_3 = 1.46, T_4 = 81.83$$

$$\sigma_1 = -0.1502, \omega_1 = 0.09044, \tau_1 = 75.01, T = 3.33$$

$$\sigma_2 = 0.2022, \omega_2 = 0.1279, \tau_2 = 1.2032$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{0.1245\,s\ +\ 0.001835}{s^3 +\ 0.4177\,s^2 +\ 0.06263\,s\ +\ 0.0007631} & \frac{-0.02384\,s^2 -\ 0.006537\,s\ +\ 0.0001868}{s^4 +\ 1.249\,s^3 +\ 0.4098\,s^2 +\ 0.05282\,s\ +\ 0.0006343} \\ \frac{0.07393\,s^2 +\ 0.05154\,s\ +\ 0.0006188}{s^3 +\ 0.4177\,s^2 +\ 0.06263\,s\ +\ 0.0007631} & \frac{0.07981\,s^3 -\ 0.02606\,s^2 +\ 0.003079\,s\ -\ 6.401e-05}{s^4 +\ 1.249\,s^3 +\ 0.4098\,s^2 +\ 0.05282\,s\ +\ 0.0006343} \end{bmatrix}$$

الف) بررسی مشخصه ها و پاسخ حلقه باز سیستم :

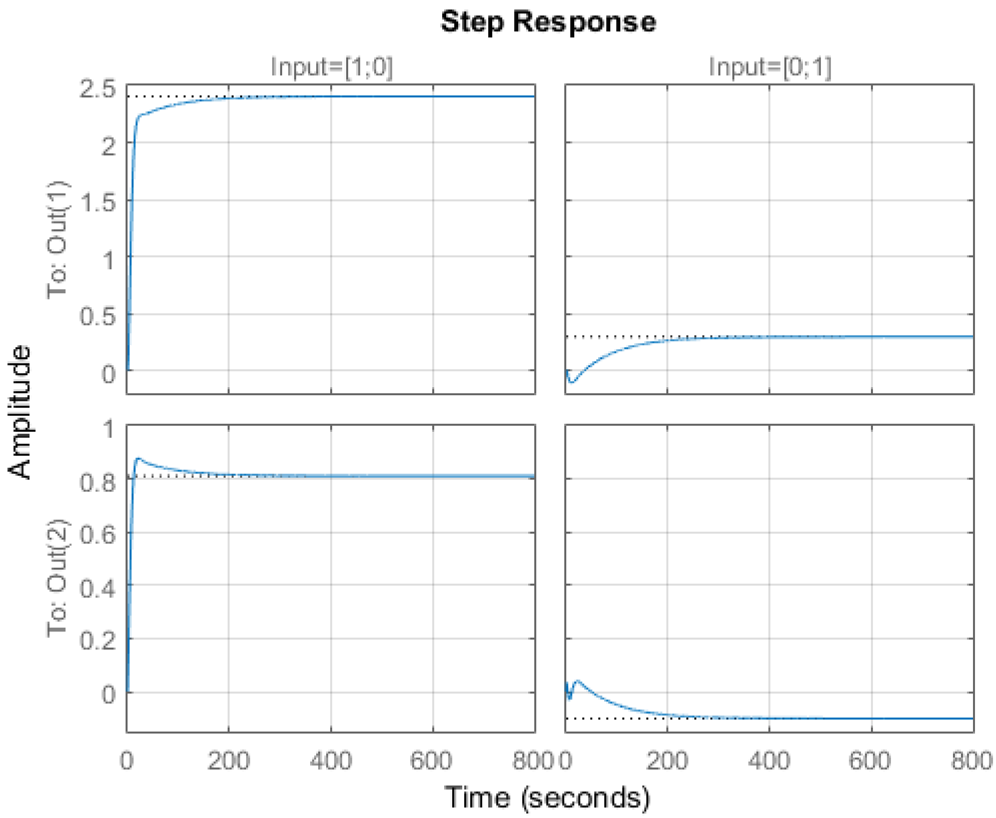
بدست آوردن صفر و قطب ها از فرم اسمیث مک میلان :

صفرهای انتقال : {0.0529±i0.2319 و 0.0261 و -0.0135}

قطب ها : {-0.2022±i0.1279 و -0.0133 و -0.8311 و -0.2022±i0.1279 و -0.0133}

سیستم حلقه باز پایدار می باشد و سیستم غیر مینیمم فاز می باشد.

پاسخ حلقه باز به ورودی پله :

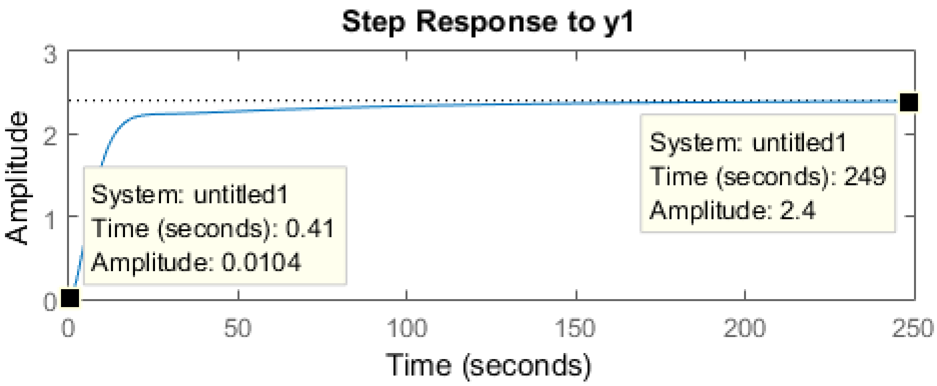


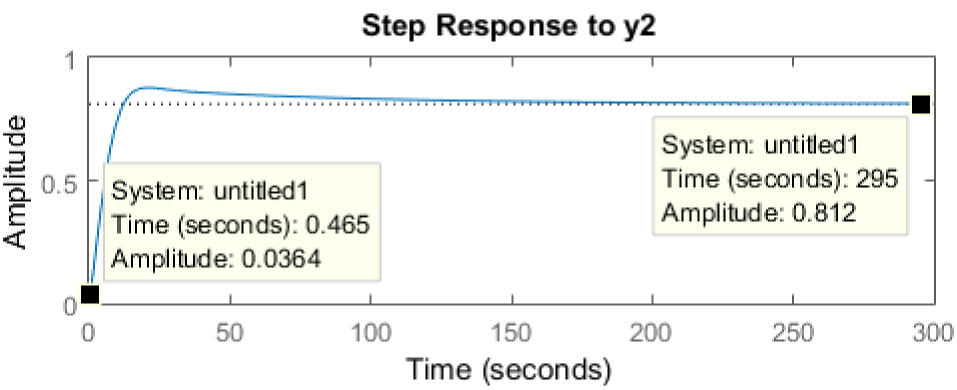
همانطور که مشاهده می کنیم پاسخ ها نامطلوب می باشند و هم تداخل زیادی داریم در عین حال سیستم بسیار کند می باشد همچنین در خروجی دوم اصلا ردیابی نداریم ولی در خروجی اول ردیابی داریم ولی دارای خطای حالت ماندگار است.

ب) استفاده از دو راهکار برای طراحی PI :

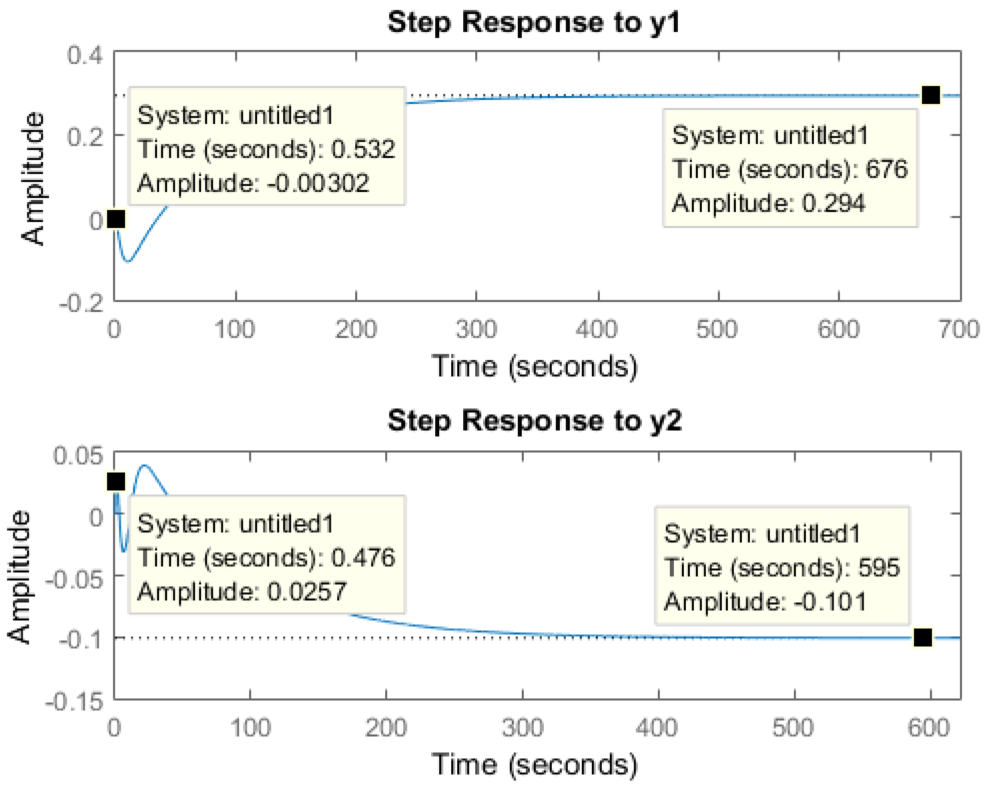
ابتدا بدست آوردن ماتریس (CB) از روی مشتق پاسخ پله در $t=0^+$:

بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_1 :





بدست آوردن $\dot{y}$ ها : برای ورودی u_2 :



$$CB = [\dot{y}1 \quad \dot{y}2][u1 \quad u2]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.025 & -0.0056 \\ 0.078 & 0.054 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.025 & -0.0057 \\ 0.078 & 0.054 \end{bmatrix}$$

بدست آوردن ماتریس پاسخ حالت ماندگار با توجه به شکل

$$G(0) = \begin{bmatrix} 2.4 & 0.294 \\ 0.812 & -0.101 \end{bmatrix}$$

حال پس از بدست آوردن تمامی موارد مورد نیاز از روی پاسخ پله حلقه باز به طراحی PI می پردازیم :

راهکار اول :

ابتدا باید منظم بودن سیستم را چک نماییم :

$$|CB| = -0.0009132 \neq 0$$

پس سیستم منظم است و CB رتبه کامل می باشد.

طراحی ضرایب PI :

$$K1 = (CB)^{-1} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.0903 & 3.1762 \\ -43.4637 & 13.9307 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix}$$

$$K2 = G^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 0.2099 & 0.6111 \\ 1.6877 & -4.9883 \end{bmatrix}$$

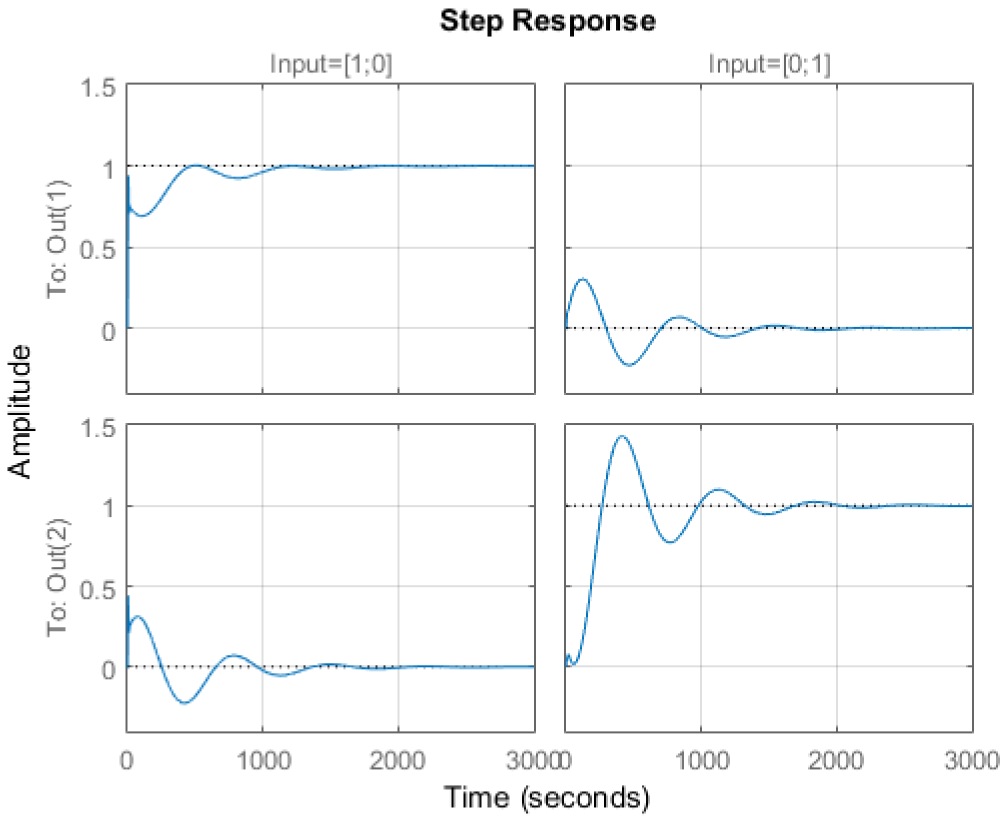
پس داریم:

$$PI = K1 + \frac{\varepsilon K2}{s}$$

پس به کمک مقادیر پارامترهای تنظیم به صورت زیر :

$$k1 = k2 = 0.05 \quad , \varepsilon = 0.008$$

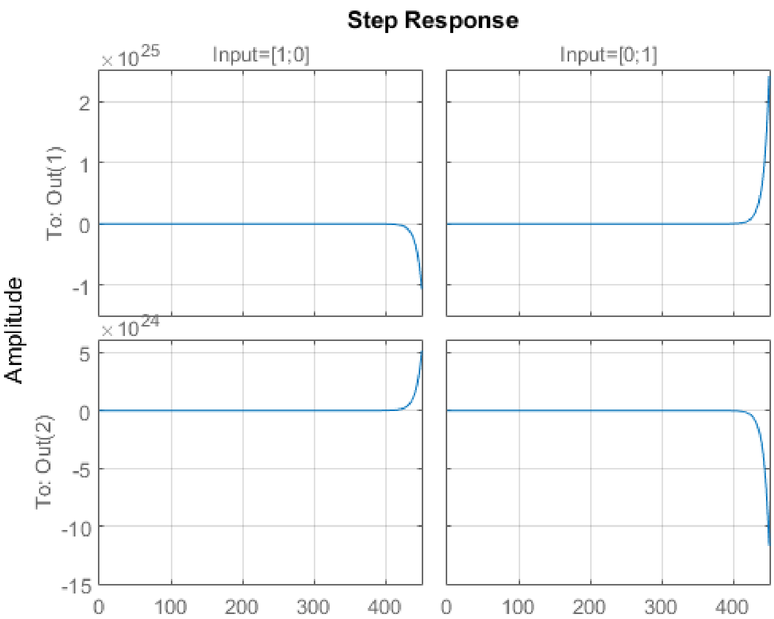
پاسخ سیستم حلقه بسته پس از اعمال کنترلر



همانطور که می بینیم پاسخ ها خیلی مطلوب نیستند و اثر تداخل به راحتی از بین نمی روند

اما اگر مقدار کمی ضرایب را عوض نماییم سیستم ناپایدار می گردد و راهکار اول کنترلر مقاومی را برای ما طراحی نمی کند دلیل آن این است که اگر سیستم را تحقق دهیم داریم :

برای ε=1 :



A =

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	-0.4177	-0.2505	-0.04884	0	0	0	0
x2	0.25	0	0	0	0	0	0
x3	0	0.0625	0	0	0	0	0
x4	0	0	0	-1.249	-0.4098	-0.2113	-0.04059
x5	0	0	0	1	0	0	0
x6	0	0	0	0	0.25	0	0
x7	0	0	0	0	0	0.0625	0

B =

	u1	u2
x1	1	0
x2	0	0
x3	0	0
x4	0	0.25
x5	0	0
x6	0	0
x7	0	0

C =

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0	0.4979	0.1174	0	-0.09536	-0.1046	0.04781
y2	0.07393	0.2062	0.0396	0.3192	-0.1042	0.04926	-0.01639

D =

	u1	u2
y1	0	0
y2	0	0

حال اگر ماتریس CB را محاسبه نماییم :

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0739 & 0.0798 \end{bmatrix} \rightarrow |CB| = 0$$

پس سیستم در واقع نامنظم می باشد و نمی توان از راهکار اول برای این سیستم استفاده نمود و کنترلر PI مقاومی طراحی کرد.

پس برای این سیستم باید از راهکار دوم استفاده نماییم.

راهکار دوم :

در راهکار دوم داریم:

$$u(t) = \alpha\varepsilon K e(t) + \varepsilon K z(t)$$

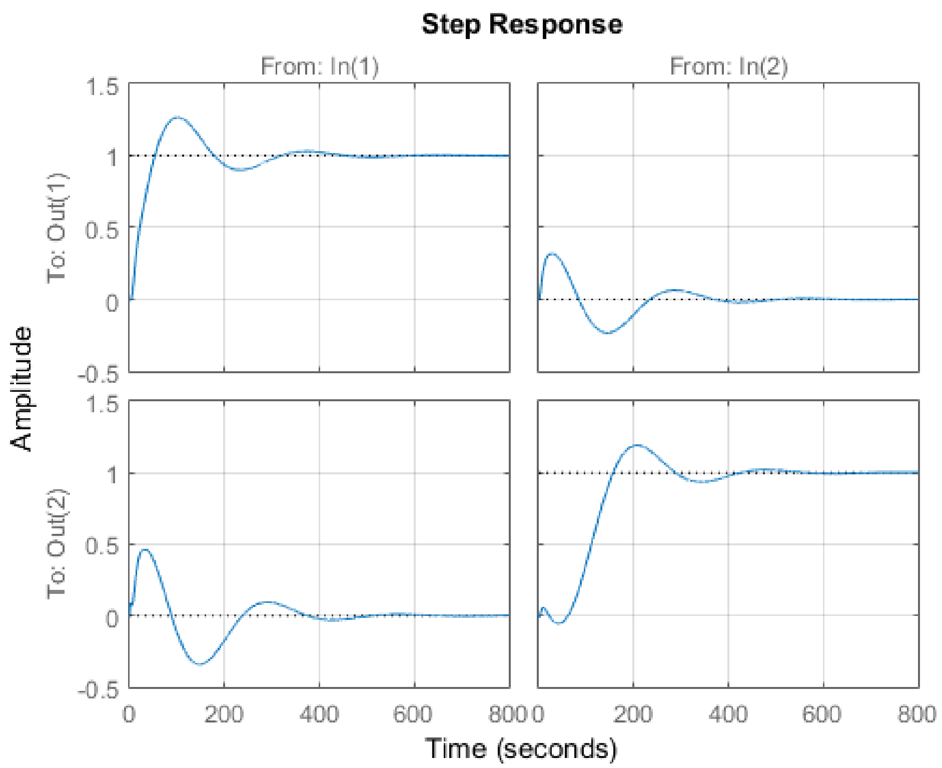
$$PI = \alpha\varepsilon K + \frac{\varepsilon K}{s}$$

$$K = G^T(GG^T)^{-1}\Sigma$$

پس مقادیر را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 10, \quad \varepsilon = 0.1, \quad K = G^T(GG^T)^{-1}\Sigma = \begin{bmatrix} 0.2099 & 0.6111 \\ 1.6877 & -4.9883 \end{bmatrix}$$

پاسخ سیستم حلقه بسته شامل خروجی ها پس از اعمال کنترلر



همانطور که در پاسخ مشاهده می نماییم تداخل قابل توجهی داریم که اثر تداخل در طی حدود 400 ثانیه توسط کنترلر از بین می رود که بسیار کند می باشد و پاسخ دارای فراجهشی در حدود 25٪ می باشد. همچنین پاسخ خروجی دوم نسبت به اول کندتر می باشد.

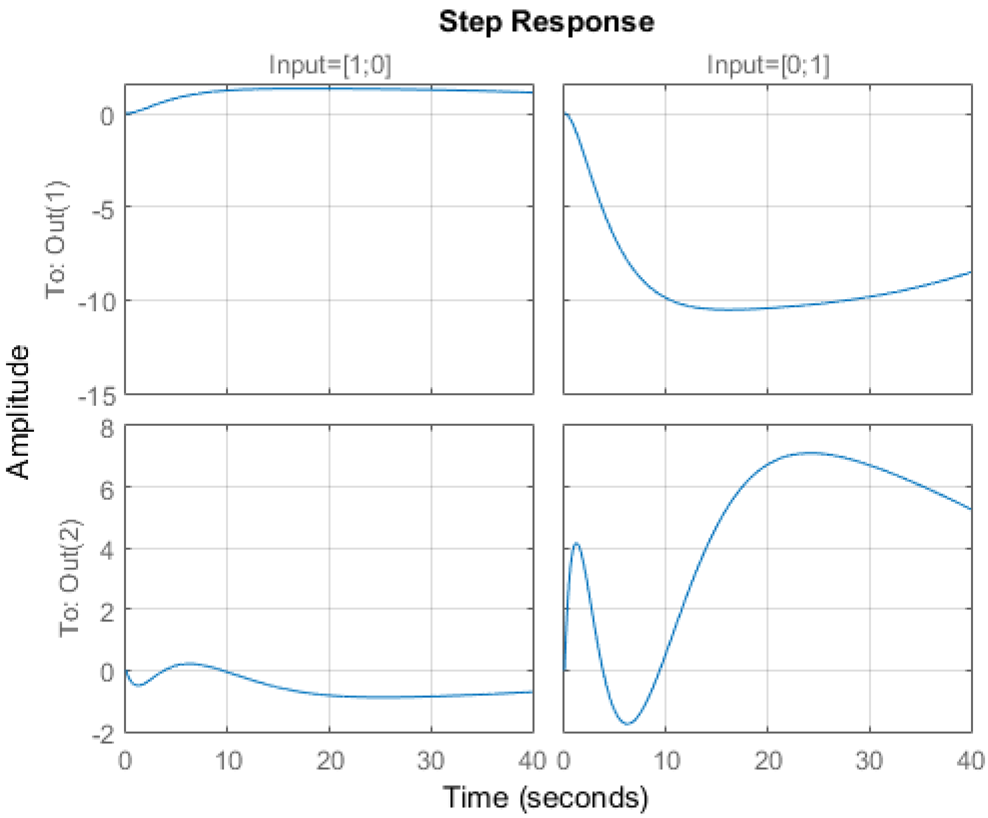
ب) پاسخ سیستم جبران شده به کمک پیش جبرانساز زیر :

$$\begin{bmatrix} \frac{-0.02215(s-0.03)(s+0.025)}{s(s+0.03)} & \frac{-0.0123(s-0.03)(s+0.02)}{s(s+0.03)} \\ \frac{0.246(s+0.025)}{s} & \frac{-0.419(s+0.02)}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

پس سیستم جدید :

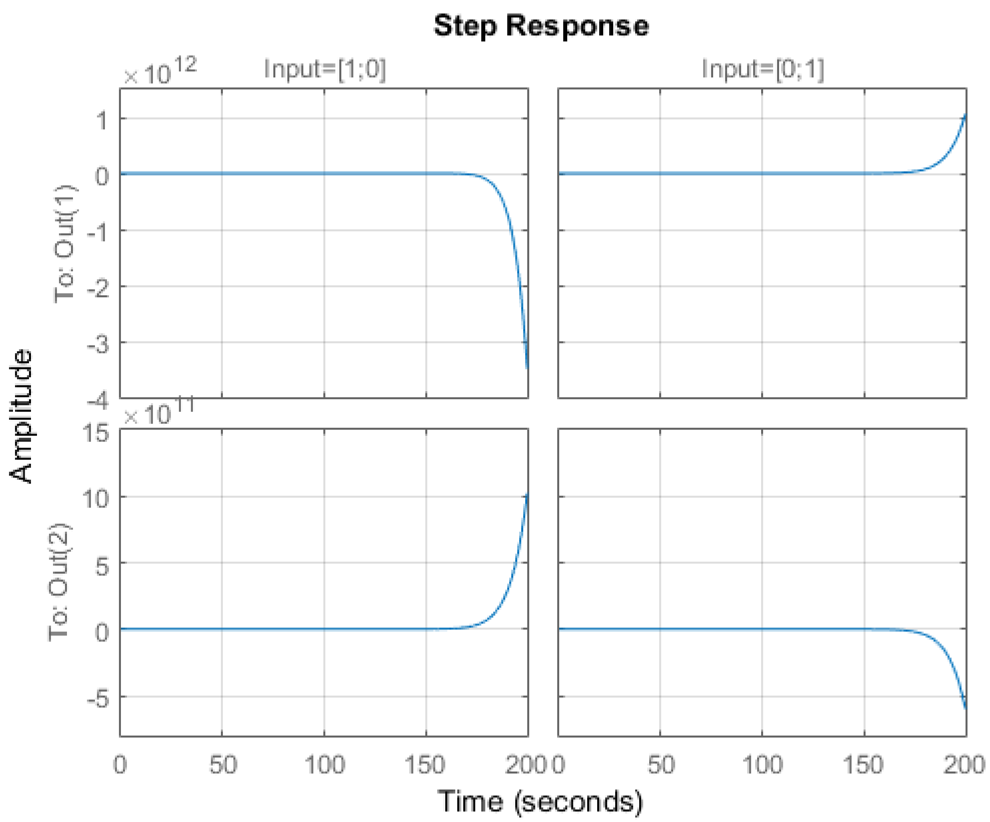
$$G_{new} = GC_p$$

پاسخ پله سیستم حلقه باز جدید :



همانطور که میبینیم سیستم حلقه باز جبران شده نیز نامطلوب بوده و تداخل زیادی دارد.

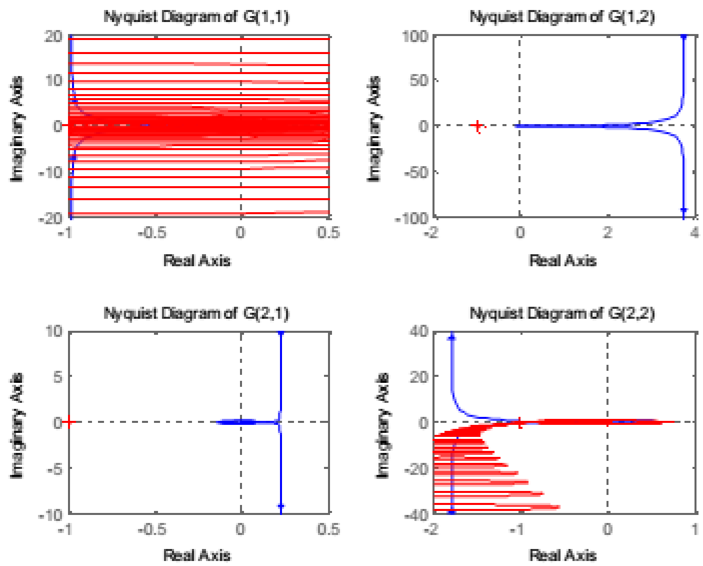
پاسخ سیستم جبران شده حلقه بسته به کمک کنترلر طراحی شده در راهکار دوم



همانطور که میبینیم سیستم جبران شده به کمک کنترلر اعمالی ناپایدار شده است .

رسم باند گرشگورین :

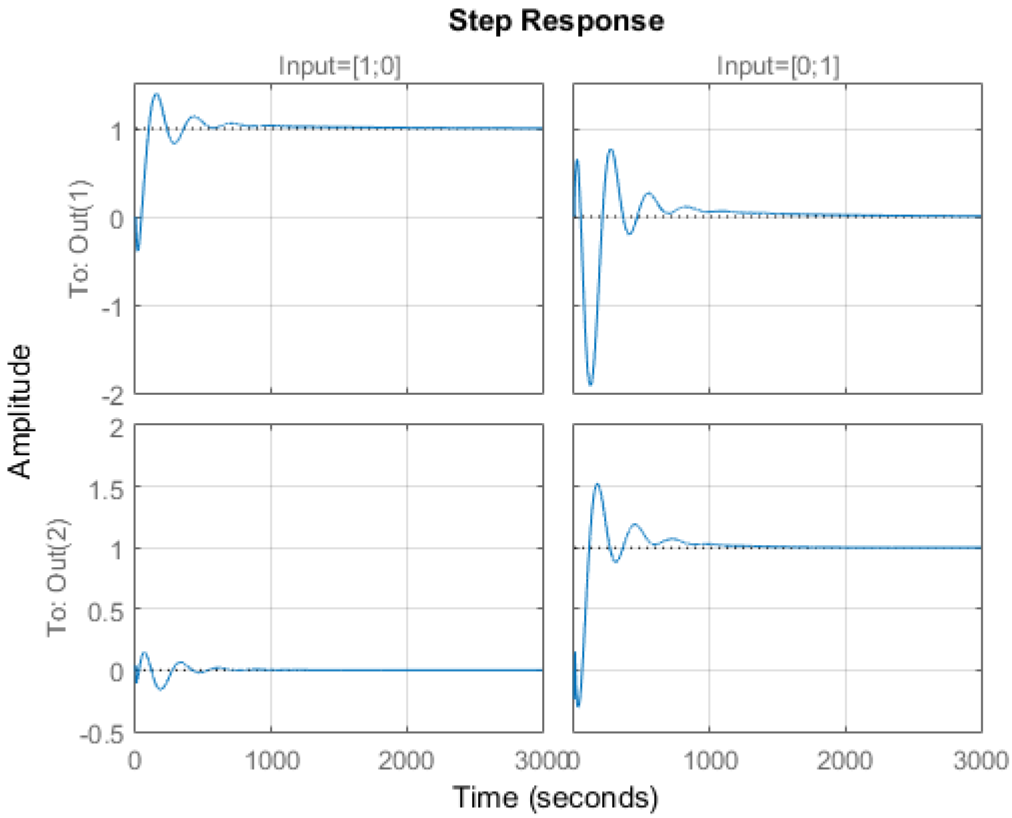
به کمک کد داده شده در کتاب باند گرشگورین سیستم جبران شده حلقه باز را رسم نموده ایم :



برای اینکه سیستم غلبه قطری باشد و تداخل کمتری داشته باشد هیچ کدام از بانده نباید مبدا را شمال شوند در حالی که از شکل متوجه می شویم این بانده مبدا را دور می زنند و تداخل شدید در سیستم حلقه باز وجود دارد.

ج) طراحی PI غیرمتمرکز برای سیستم جبران شده

$$PI_{Decentrelized} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{s}\right)\begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$



با مشاهده پاسخ ها متوجه تداخل زیاد در کانال اول می شویم و پاسخ ها نوسانات زیادی دارند.

برای پایداری سیستم حلقه بسته باید ضرایب Ki را کوچک گرفته و داشتن فراجهش کمتر از Kp بزرگتر نسبت به Ki ها فرض کنیم.

د) مقایسه نتایج بند الف و ج

با مقایسه پاسخ ها متوجه می شویم کنترلر های طراحی شده در بند الف پاسخ های مطلوب تری نسبت به PI غیرمتمرکز داشته اند هم زمان نشست کمتر و هم فراجهش کمتری داشته اند همچنین اثر تداخل در بند ج که PI غیرمتمرکز قرار داده ایم بسیار زیاد و طولانی می باشد و بعد از 1100 ثانیه اثر آن از بین می رود که از نظر تداخل نیز طراحی بند الف بهتر بوده.

جواب سوال 5-8 :

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3&1&1\\-6&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&c_{12}&1\\1&c_{21}&-1\end{bmatrix}x$$

الف) بررسی خواص سیستم چند متغیره از نظر صفرهای انتقال و منظم بودن

برای حالت $c_{12}=-1$ و $c_{21}=0$:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3&1&1\\-6&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}x$$

$$C_2B_2=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\rightarrow\ |C_2B_2|=1\neq 0$$

از آنجایی که رتبه C_2B_2 کامل است پس سیستم منظم می باشد .

بدست آوردن قطب و صفرهای سیستم :

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{-s+4}{s^2-4s+9}&\dfrac{1}{s^2-4s+9}\\ \dfrac{4s+2}{s^3-7s^2+21s-27}&\dfrac{-s^2+6s-13}{s^3-7s^2+21s-27}\end{bmatrix}$$

$$M(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s-3)(s^2-4s+9)}&0\\0&s-6\end{bmatrix}$$

صفرهای انتقال سیستم : s=6

قطب های انتقال سیستم : s=3 و s=2±i2.236

بدست آوردن صفرهای انتقال سیستم به کمک فرمول فصل هشتم :

$$|\lambda-A_{11}+A_{12}C_2^{-1}C_1|=\left|\lambda-3+\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right|=|\lambda-6|=0\rightarrow\lambda=6$$

همانطور که میبینیم سیستم دارای صفر غیرمینیم فاز می باشد و همچنین تمام قطب های حلقه باز ناپایدار می باشند. برای طراحی PI بهره بالا برای سیستم باید شرط مینیمم فازی رعایت شود در حالی که این سیستم نامینیمم فازی می باشد.

برای حالت $c_{12}=-1$ و $c_{21}=1$:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}x$$

$$C_2B_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\ |C_2B_2|=0$$

از آنجایی که رتبه C_2B_2 کامل نیست و ویژه نمی باشد پس سیستم نامنظم می باشد .

بدست آوردن قطب و صفرهای سیستم :

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{-s+4}{s^2-4s+9} & \dfrac{s-2}{s^2-4s+9}\\ \dfrac{4s+2}{s^3-7s^2+21s-27} & \dfrac{10}{s^3-7s^2+21s-27}\end{bmatrix}$$

$$M(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s-3)(s^2-4s+9)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

صفرهای انتقال سیستم :   هیچ صفر انتقالی ندارد

قطب های انتقال سیستم : $s=3$ و $s=2\pm i2.236$

در این سیستم نیز تمامی قطب ها ناپایدار می باشند. همچنین از آنجایی که C_2B_2 رتبه کامل نمی باشد پس برای طراحی کنترل کننده PI بهره بالا نیاز به استفاده از فیدبک داخلی و ماتریس اندازه گیری M داریم.

ب) طراحی کنترل کننده PI بهره بالا :

برای حالت $c_{12}=-1$ و $c_{21}=0$:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x$$

از آنجایی که رتبه ماتریس C_2B_2کامل می باشد و سیستم منظم می باشد باید راهکار اول را در پیشگیریم ولی در این حالت سیستم صفر غیرمینیمم فاز دارد و نمی توان از روش گفته استفاده نمود پس باید ابتدا برای سیستم جایابی صفر انجام دهیم .

پس همانطور که برای سیستم نامنظم از فیدبک داخلی به کمک ماتریس اندازه گیری M استفاده می نمودیم این روش را قبلا برای جایابی صفر انجام می دادیم در نتیجه در اینجا نیز درست است که سیستم منظم می باشد ولی به دلیل داشتن صفر غیرمینیمم فاز مجبوریم از همان ایده برای سیستم نامنظم استفاده نماییم.

$w(t) = y(t) + M\dot{x}_1(t)$ فیدبک بسته شده برای جایابی صفر

$$w = [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + M[A_{11} \quad A_{12}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [C_1 + MA_{11} \quad C_2 + MA_{12}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$w = [F_1 \quad F_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \ F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3m_1 \\ 1+3m_2 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}[1 \quad 1] = \begin{bmatrix} -1+m_1 & 1+m_1 \\ m_2 & -1+m_2 \end{bmatrix},$$

$|\lambda - A_{11} + A_{12}F_2^{-1}F_1| = \lambda + \dfrac{6}{m_1 + 2m_2 - 1}$ رابطه صفر انتقال سیستم جدید

پس باید ماتریس M را بگونه ای بدست آورد که ماتریس F_2B_2 ، رتبه کامل شود.

پس $m_1=1.5$ و $m_2=0$:

$$M = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = -12 \qquad ,F_2B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |F_2B_2| = -0.5 \neq 0$$

پس رتبه ماتریس F_2B_2 کامل می باشد .

پس حال کنترل کننده PI را به صورت زیر بدست می آوریم :

$$k(s) = g\left\{k_1 + \frac{k_2}{s}\right\}$$

$\sum = diag\{10,1\}$به صورت انتخابی

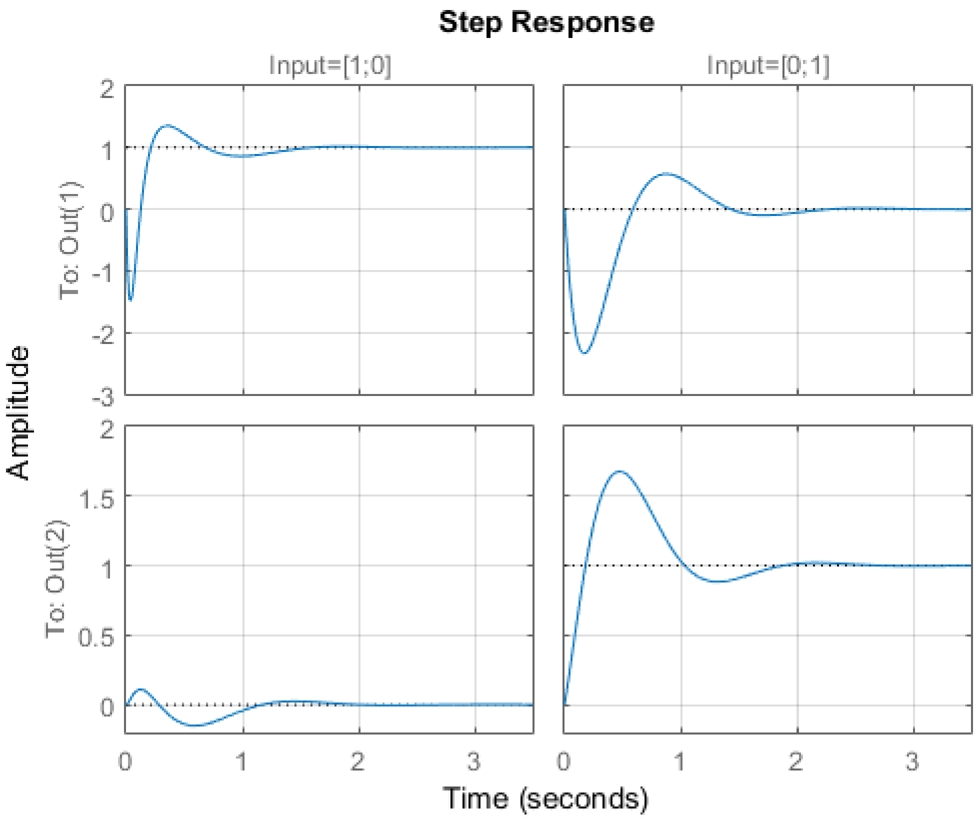
$$K_1 = (F_2B_2)^{-1}\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

همچنین با انتخاب $\alpha=-2$ و $g=5$ داریم :

$$K_2 = -\alpha K_1 = 2K_1 = \begin{bmatrix} 40 & 12 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$K(s) = g\left\{K_1 + \frac{K_2}{s}\right\} = 5\{\begin{bmatrix} 20 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 40 & 12 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\}$$

پاسخ های پله سیستم بعد از اعمال این کنترلر :



همانطور که در پاسخ ها مشاهده می کنیم در کانال اول در اثر ورودی دوم تداخل نسبتا زیادی داریم همچنین فراجهش در کانال دوم نزدیک به 60٪ می باشد که زیاد می باشد همچنین در کانال اول در ابتدای پاسخی فروجهشی در حد 120-٪ می باشد که نامطلوب است.

برای حالت $c_{12}=-1$ و $c_{21}=1$:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3&1&1\\-6&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}x$$

پس با توجه به اینکه ماتریس C_2B_2 رتبه کامل نیست پس سیستم نامنظم و از روش فیدبک داخلی

به کمک ماتریس اندازه گیری M استفاده می کنیم :

$w(t)=y(t)+M\dot{x}_1(t)$ فیدبک داخلی بسته شده

$$w=[C_1\quad C_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+M[A_{11}\quad A_{12}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[C_1+MA_{11}\quad C_2+MA_{12}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$w=[F_1\quad F_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\rightarrow\ F_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}m_1\\m_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3m_1\\1+3m_2\end{bmatrix},$$

$$F_2=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m_1\\m_2\end{bmatrix}[1\quad 1]=\begin{bmatrix}-1+m_1&1+m_1\\1+m_2&-1+m_2\end{bmatrix},$$

$|\lambda-A_{11}+A_{12}F_2^{-1}F_1|=\lambda+\dfrac{2}{m_1+m_2}$ رابطه صفر انتقال سیستم جدید

پس باید ماتریس M را بگونه ای بدست آورد که ماتریس F_2B_2 ، رتبه کامل شود.

پس $m_1=0$ و $m_2=0.5$:

$$M=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}\rightarrow\lambda=-4\qquad ,F_2B_2=\begin{bmatrix}-1&1\\1.5&-0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\1.5&1\end{bmatrix}\rightarrow|F_2B_2|=-1\neq0$$

پس رتبه ماتریس F_2B_2 کامل می باشد .

پس حال کنترل کننده PI را به صورت زیر بدست می آوریم : $k(s)=g\left\{k_1+\frac{k_2}{s}\right\}$

$\sum=diag\{2,1\}$ به صورت انتخابی

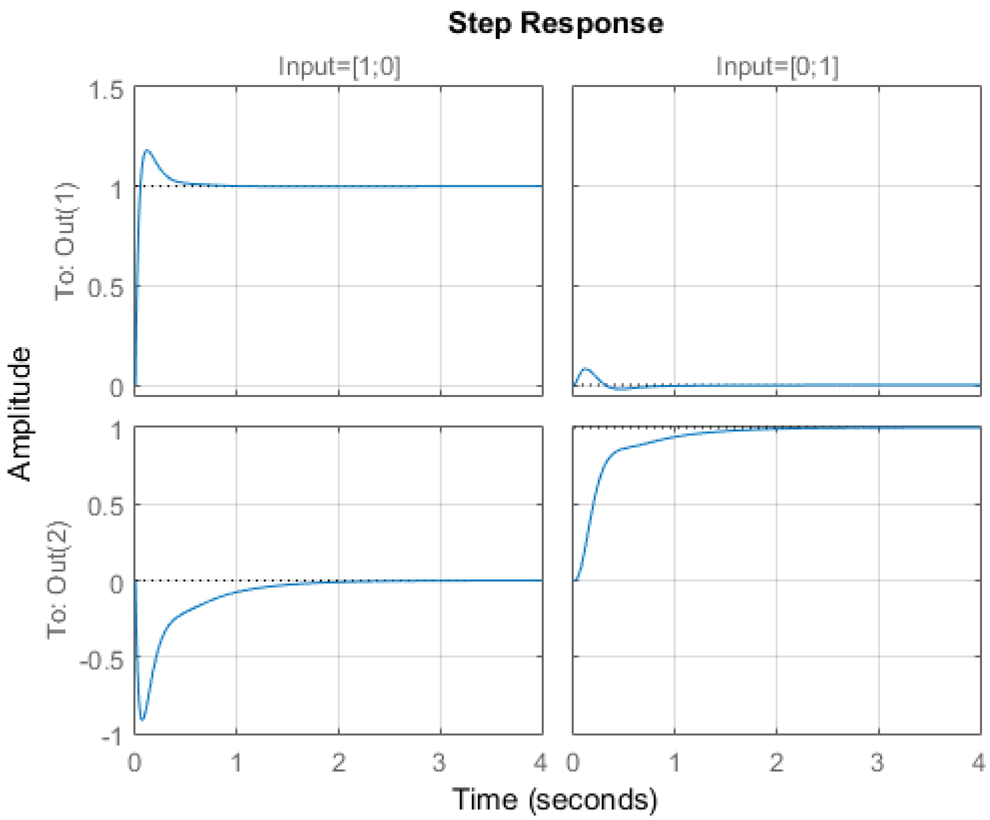
$$K_1=(F_2B_2)^{-1}\sum=\begin{bmatrix}-1&0\\1.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\3&1\end{bmatrix}$$

همچنین با انتخاب $\alpha=-3$ و $g=20$ داریم :

$$K_2=-\alpha K_1=3K_1=\begin{bmatrix}-6&0\\9&3\end{bmatrix}$$

$$K(s)=g\left\{K_1+\frac{K_2}{s}\right\}=20\{\begin{bmatrix}-2&0\\3&1\end{bmatrix}+\frac{1}{s}\begin{bmatrix}-6&0\\9&3\end{bmatrix}\}$$

پاسخ های پله سیستم بعد از اعمال این کنترلر :



در این طراحی پاسخ ها به نسبت قبلی بسیار بهتر شده اند و هم سیستم سریعتر شده و هم فراجهش کمی داریم در عین حال فروجهشی نداریم فقط در پاسخ کانال دوم به ورودی اول دارای تداخل نسبتا زیادی هستیم که باید بهبود یابد ولی پاسخ در کل با توجه به طراحی دوم بهتر از حالت اول می باشد.