حل میان‌ترم چند متغیره‌ی سال ۹۴

نام: ....

نام خانوادگی: ....

امتحان درس: ....

تاریخ امتحان: ....

تأسیس ۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دوره: ....

رشته: ....

کل نمره نهایی: ....

شماره دانشجویی: ....

نام استاد: ....

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{۵}{s+۴} & \frac{۲}{s+۲} \\ \frac{۴s}{s+۳} & \frac{۱}{s} \end{bmatrix}$$

اندیس‌های دکوپله‌سازی : d_i = مینیمم درجات نسبی در ردیف i ام $\Rightarrow \begin{cases} d_1=۱ \\ d_۲=۰ \end{cases}$

1

$$\Rightarrow D=\begin{bmatrix} s^{d_1} & ۰ \\ ۰ & s^{d_۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow B^*=\lim_{s\to\infty} D(s)\,G(s)=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow |B^*| \neq ۰$$

4 1

$\Downarrow$

دکوپله‌سازی با فیدبک حالت استاتیکی امکان پذیر است.

اکنون تحقق فضای حالت $G(s)$ را باید به دست آوریم. به این منظور تحقق گیلبرت G را محاسبه می‌کنیم:

$$D=\lim_{s\to\infty} G(s)=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow G'(s)=\begin{bmatrix} \frac{۵}{s+۴} & \frac{۲}{s+۲} \\ \frac{-۱۲}{s+۳} & \frac{۱}{s} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ فرم اسمیت مک میلان G' :

$$SM_{G'}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{s(s+۲)(s+۳)(s+۴)} & ۰ \\ ۰ & -۸s^۳-۲۷s^۲+۲۵s+۳۰ \end{bmatrix}$$

2

$\text{Poles}:\{۰, -۲, -۳, -۴\} \Rightarrow$ تحقق مینیمال از درجه‌ی ۴ است.

$$\Rightarrow G'=M\frac{۱}{s}+N\frac{۱}{s+۲}+P\frac{۱}{s+۳}+Q\frac{۱}{s+۴}$$

$$M=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} ,\quad N=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \end{bmatrix} ,\quad P=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\\-12&0\\5&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0&0\\4&0\end{bmatrix}$$

1

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}C_1^T A^{d_1}\\ C_2^T A^{d_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&0&-4\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

1

فیدبک حالت : $u=(B^*)^{-1}(-\bar{B}x+v)=\begin{bmatrix}0&0.25\\0.5&-0.625\end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix}0&-2&0&-4\\1&0&1&0\end{bmatrix}x+v\right)\Rightarrow$

$$u=\underbrace{\begin{bmatrix}-0.25&0&-0.25&0\\+0.625&+1&+0.625&+2\end{bmatrix}}_{K}x+\underbrace{\begin{bmatrix}0&0.25\\0.5&-0.625\end{bmatrix}}_{K'}v$$

1

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=Ax+BKx+BK'v\\ y=Cx+DKx+DK'v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=\overbrace{(A+BK)}^{A_{cl}}x+\overbrace{BK'}^{B_{cl}}v\\ y=\underbrace{(C+DK)}_{C_{cl}}x+\underbrace{DK'}_{D_{cl}}v\end{cases}\Rightarrow$$

$$A_{cl}=\begin{bmatrix}+0.625&+1&+0.625&+2\\+1.25&0&+1.25&+4\\+3&0&0&0\\-1.25&0&-1.25&-4\end{bmatrix},\quad B_{cl}=\begin{bmatrix}0.5&-0.625\\1&-1.25\\0&-3\\0&1.25\end{bmatrix},\quad C_{cl}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

1

$$D_{cl}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow G_{cl}=C_{cl}(SI-A_{cl})^{-1}B_{cl}+D_{cl}\Rightarrow G_{cl}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&0\\0&1\end{bmatrix}$$

هم چنین در صورتی که صفرهای G از صورت اسمیت مک میلان G محاسبه شود، برابر ۳/۹- ، ۰/۷۳- و ۱/۲۹ خواهند بود که نشان دهنده‌ی غیرمینیمم فاز بودن سیستم و ناپایداری داخلی سیستم دکوپله شده است. 1

پایداری H_{11} ، H_{21} و H_{22} ضوابط پایداری H_{12} ← $G(s)$ پایدار

$$H_{12}(s) = \left[I + K(s)G(s) \right]^{-1} K(s) \quad = K\left[I + GK \right]^{-1}$$

۲/۵

$H_{12}(s)$ پایدار عالی ← $G(s)$ پایدار عالی ⟷

۱) $|I + KG|$ هیچ صفری در نیمه راست صفحه S نداشته باشد

۲) $[I+KG]^{-1}K$ در هر قطب در نیمه راست صفحه S از K کمتی باشد

$$\Delta_K = (s-1)^2$$

۱)

$$|I + KG| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{k_1}{s^2-1} & \frac{2k_1}{s^2-1} \\ \frac{3k_2}{(s+2)(s-1)} & 1 + \frac{4k_2}{s^2-1} \end{vmatrix} = \frac{(s^2-1+k_1)(s^2-1+4k_2)}{(s^2-1)^2} - \frac{6k_1k_2}{(s^2-1)(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{1}{(s^2-1)^2(s+2)} \left[(s^2-1+k_1)(s^2-1+4k_2)(s+2) - 6k_1k_2(s+1) \right]$$

۵

$$= \frac{1}{\alpha} \Big[s^5 + 2s^4 + (k_1 + 4k_2 - 2)s^3 + 2(k_1 + 4k_2 - 2)s^2 + (-2k_1k_2 - k_1 - 4k_2 + 1)s + 2(k_1k_2 - k_1 - 4k_2 + 1) \Big]$$

ناپایداری داخلی

۲/۵

$$= \frac{(s-1)}{(s-1)^3(s+1)^2(s+2)} \Big[s^4 + 3s^3 + (k_1 + 4k_2 + 1)s^2 + 3(k_1 + 4k_2 - 1)s + 2(-k_1k_2 + k_1 + 4k_2 - 1) \Big]$$