تحلیل و طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره در حوزه فضای حالت

علی خاکی صدیق

گروه کنترل- مهر ۱۳۹۰

- **مقدمه**

  - مفاهیم پایه: کنترل پذیری و رویت پذیری
  - کنترل پذیری تابعی (خروجی)
  - نظریه تحقق
  - کاهش مرتبه معادلات فضای حالت
  - دکوپله سازی سیستم های چندمتغیره با فیدبک حالت

- **مفاهیم پایه: کنترل پذیری و رویت پذیری**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{l\times n}$$

$$\mathrm{rank}B = m, \mathrm{rank}C = l$$

شرط لازم و کافی کنترل پذیری سیستم :

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in R^{n\times nm}$$

اندیس های کنترل پذیری سیستم :

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_m & Ab_1 & \cdots & Ab_m & \cdots & A^{n-1}b_1 & \cdots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{llll} b_1 & Ab_1 & \cdots & A^{\mu_1-1}b_1 \rightarrow \mu_1 \\ & & \vdots & \\ b_i & Ab_i & \cdots & A^{\mu_i-1}b_i \rightarrow \mu_i \end{array}\right\} (i=2,\cdots,m)\text{Controllability indices}$$

we have,

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i = n, \qquad \nu_c = \max_i \mu_i \quad (i=1,\cdots,m)\text{Controllability index}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{q-1}B \end{bmatrix} \quad (1 \le q \le n) \text{ Partial Controllability Matrix}$$

* **یک مثال**

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

ماتریس کنترل‌پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = [\mathrm{B} \quad \mathrm{AB}] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{Ab}_1 & \mathbf{Ab}_2 \end{array} \end{array}$$

رتبه Φ_c برابر ۲ است و لذا سیستم کنترل‌پذیر حالت است. توجه کنید که $\mathbf{b}_1$ و $\mathbf{Ab}_1$ مستقل خطی می‌باشند و لذا $\mu_1 = 2$ می‌باشد و در این حالت $\mathbf{b}_1$ و $\mathbf{b}_2$ وابسته خطی می‌باشند.

- **یک مثال**

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&2&0\\0&1&3&1\\0&0&-21&5\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

ماتریس کنترل‌پذیری سیستم عبارتست از

$$\begin{array}{cc}\Phi_c= & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&1&8\\0&0&1&0&0&2&2&17\\0&0&0&1&1&8&3&30\\0&1&0&5&0&4&-21&-14\end{bmatrix}\\ & \begin{matrix}b_1&b_2&Ab_1&Ab_2&A^2b_1&A^2b_2&A^3b_1&A^3b_2\end{matrix}\end{array}$$

رتبه Φ_c برابر ۴ است و لذا سیستم کنترل‌پذیر حالت است. داریم

$$b_1\ ,\ b_2\ ,\ Ab_1\ ,\ Ab_2$$

بردارهای مستقل خطی هستند و لذا

$$b_1\ ,\ Ab_1\ \Rightarrow\ \mu_1=2$$

$$b_2\ ,\ Ab_2\ \Rightarrow\ \mu_2=2$$

و $\mu_1+\mu_2=4$.

شرط لازم و کافی رویت پذیری سیستم.

اندیس های رویت پذیری سیستم.

ماتریس رویت پذیری جزیی سیستم.

سیستم های کنترل پذیر و رویت پذیر.

حذف قطب-صفر درسیستم های کنترل:

$$(sI - A)^{-1}B \quad \text{or} \quad C(sI - A)^{-1}$$

- **کنترل پذیری و رویت پذیری در توصیف ماتریس سیستم**

$$\mathrm{P}(s)=\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)=R(s)P^{-1}(s)Q(s)+W(s)$$

$$\text{Let, } \left|L(s)\right|\neq 0$$

$$P(s)=L(s)\bar{P}(s)$$

$$Q(s)=L(s)\bar{Q}(s)$$

$$\Rightarrow G(s)=R(s)\bar{P}^{-1}(s)\bar{Q}(s)+W(s)$$

آیا کاهش مرتبه ای در تشکیل ماتریس تابع تبدیل رخ داده است؟

به طور مشابه ای، اگر:

$$\left| D(s) \right| \neq 0$$

$$P(s) = \bar{P}(s)D(s)$$

$$R(s) = \bar{R}(s)D(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \bar{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)Q(s) + W(s)$$

آیا کاهش مرتبه ای در تشکیل ماتریس تابع تبدیل رخ داده است؟

چند تعریف:

$$\left|L(s)\right| = 0 \Rightarrow \text{i.d.z}$$

$$\left|D(s)\right| = 0 \Rightarrow \text{o.d.z}$$

Let,

$$\{\beta_i\} = \text{i.d.z}, \{\gamma_i\} = \text{o.d.z}, \text{and}$$

$$\{\theta_i\} = \text{o.d.z after removing all the i.d.z, then}$$

$$\{\delta_i\} = \{\gamma_i\} - \{\theta_i\} = \text{i.o.d.z}$$

- **یک مثال**

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s)=\left[\begin{array}{cc:c} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+2 & 0 \\ \hdashline -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

یک i.d.z در $\beta=-2$ وجود دارد و مود متناظر با این صفر از ورودی دکوپله است. یعنی آنکه، فرض کنیم که سیستم از شرایط اولیه صفر در $t=0$ شروع شود و یک ورودی دلخواه در گستره زمانی $0<t\leq t_0$ به سیستم اعمال و بعد از آن ورودی صفر گردد. آنگاه حرکت آزاد برای $t>t_0$ به صورت $c_1e^{-(t-t_0)}+c_2e^{-2(t-t_0)}$ بوده و c_2 صرفنظر از ورودی صفر خواهد بود. اگر ماتریس سیستم زیر را با استفاده از عملیات مقدماتی و توسط اکیداً معادل بودن سیستمی از $\mathbf{P}(s)$ بدست آوریم

$$\mathbf{P}_1(s)=\left[\begin{array}{cc:c} (s+1) & 0 & 1 \\ -s(s+1) & s+2 & 2 \\ \hdashline -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

این ماتریس سیستم نیز یک i.d.z در $\beta=-2$ دارد. در واقع

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}(-2) & \mathbf{Q}(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

- **یک مثال**

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s)=\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s(s+1) & \mathbf{0} & s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & s(s+2) & s \\ \hline \mathbf{0} & -1 & -1 & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

داریم $\{\beta_i\}=\{0,0\}$ و $\{\gamma_i\}=\{0\}$. با حذف i.d.z ها، ماتریس $\mathbf{P}(s)$ به صورت زیر کاهش مرتبه پیدا می‌کند

$$\mathbf{P}_1(s)=\left[\begin{array}{cc|c} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

که o.d.z ندارد. از اینرو $\{\theta_i\}=\phi$ و $\{\delta_i\}=\{0\}$.

- **یک مثال**

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s)=\left[\begin{array}{cccc:c} \mathrm{I}_2 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & s(s+1) & 0 & & s \\ 0 & 0 & s(s+2) & & 1 \\ \hdashline 0 & -1 & -s & & 0 \end{array}\right]$$

داریم $\{\beta_i\}=\{0\}$ و $\{\gamma_i\}=\{0\}$. لیکن با حذف i.d.z ، o.d.z باقی می‌ماند و لذا $\{\delta_i\}=\phi$. این نشان می‌دهد که صرفاً تطابق عددی مقادیر γ_i و β_i ایجاب نمی‌کند که آنها با δ_i نیز مطابقت داشته باشند.

مثال ۴-۶ ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{cc:cc} s^{۲}+۳s+۲ & s+۲ & ۰ & ۳s+۶ \\ s+۱ & s+۲ & ۱ & ۰ \\ \hdashline ۰ & s+۲ & ۰ & ۰ \\ s+۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

داریم $\{\beta_i\} = \{-۲\}$ و $\{\gamma_i\} = \{-۲, -۱\}$. توجه کنید که

$$\mathrm{P}(s) = \begin{bmatrix} s^{۲}+۳s+۲ & s+۲ \\ s+۱ & s+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{۲}+۳s+۲ & ۱ \\ s+۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & s+۲ \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}(s) = \begin{bmatrix} ۰ & s+۲ \\ s+۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ s+۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & s+۲ \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس سیستم بعد از حذف o.d.z در ۲- چنین می‌شود

$$\mathbf{P}_{۱}(s) = \left[\begin{array}{cc:cc} s^{۲}+۳s+۲ & ۱ & ۰ & ۳s+۶ \\ s+۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ \hdashline ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ s+۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

از آن‌جایی که ۲- دیگر i.d.z نیست، لذا ۲- یک i.o.d.z است.

■

قطب سیستم:

$$\left|P(s)\right| = 0 \Rightarrow \{\alpha_i\} = \text{System matrix poles}$$

Let,

$$\{\eta_i\} = \{\alpha_i\} - \{\{\beta_i, \gamma_i\} - \{\delta_i\}\}$$

Then, $\{\eta_i\} = \text{TFN matrix poles}$

- **یک مثال**

ماتریس سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$
\mathbf{P}(s)=\left[\begin{array}{ccc:c}
I_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & s^2(s+1) & s(s+2) & -s \\
0 & 0 & s+2 & 1 \\
\hdashline
0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right]
$$

داریم

$$\{\alpha_i\} = \{0\,,\,0\,,\,-1\,,\,-2\}$$

که قطبهای ماتریس سیستم $P(s)$، داده شده با $|P(s)|=0$ می‌باشند. همچنین بسادگی مشاهده می‌شود که

$$\{\beta_i\} = \{0\}$$

$$\{\gamma_i\} = \{0\,,\,0\,,\,-1\}$$

$$\{\theta_i\} = \{0\,,\,-1\}$$

$$\{\delta_i\} = \{0\}$$

$$\{\eta_i\} = \{-2\}$$

- **کنترل پذیری تابعی (خروجی)**

تعریف کنترل پذیری خروجی

شرط لازم و کافی کنترل پذیری خروجی

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C\,B & CAB & \cdots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix}$$

تعریف کنترل پذیری تابعی

$G(s)$ TFN Matrix with m inputs and l outputs

شرایط کنترل پذیری تابعی:

$$1.\ m \text{ inputs } \geq l \text{ outputs}$$

$$2.\ \text{rank} G(s) = l$$

سوال اصلی:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\exists U(s) \text{ s.t. } Y_R(s) = Y(s)?$$

با برآورده شدن شرایط بالا:

$$U(s) = G^T(s)[G(s)G^T(s)]^{-1} Y_R(s)$$

• یک مثال

سیستم توصیف شده با ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

داریم

$$|G(s)| = \frac{-(s-1)}{(s+1)^2(s+3)}$$

و لذا سیستم کنترل‌پذیر تابعی است. لیکن تحقق داده شده زیر، برای ماتریس تابع تبدیل $G(s)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

کنترل پذیر حالت نمی‌باشد.

مثال ۴-۹ سیستم زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

می‌توان نشان داد که $\text{رتبه}\{\Phi_c\} = \text{رتبه}\{\Phi_o\} = 3$ و سیستم کنترل‌پذیر حالت و رؤیت‌پذیر است. هم‌چنین، از آن‌جاییکه C رتبه کامل است و $\text{رتبه}\{\Phi_o\} = 3$، سیستم کنترل‌پذیر خروجی نیز است. از طرف دیگر، داریم

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix}$$

لذا سیستم کنترل‌پذیر تابعی نیست.

■

مثال ۴-۱۰ سیستم دو ورودی و دو خروجی زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

اگر سیستم کنترل‌پذیر تابعی نباشد، داریم

$$g_{11}(s)g_{22}(s) = g_{12}(s)g_{21}(s)$$

لذا

$$\begin{aligned} y_2(s) &= g_{21}(s)u_1(s) + g_{22}(s)u_2(s) \\ &= g_{21}(s)u_1(s) + \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)}u_2(s) \\ &= \frac{g_{21}(s)\left(g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s)\right)}{g_{11}(s)} \\ &= \frac{g_{21}(s)}{g_{11}(s)}y_1(s) \end{aligned}$$

این معادله نشان می‌دهد که $y_1(s)$ و $y_2(s)$ به هم وابسته‌اند و نمی‌توان دو خروجی را به طور مستقل از هم کنترل کرد و بنابراین سیستم کنترل‌پذیر تابعی نیست.

■

- **نظریه تحقق در سیستم های چندمتغیره**

  - مفاهیم پایه: تحقق می نیمال و تحقق های کانونیکال
  - تحقق غیرمی نیمال و کاهش مرتبه
  - تحقق گیلبرت

تحقق های غیرمی نیمال یا مستقیم

نمایش ستونی (یا به طور مشابه) ردیفی ماتریس تابع تبدیل:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) & \cdots & g_m(s) \end{bmatrix}$$

$$g_{ij}(s) = \frac{\beta_1^{ij} s^{\delta_j - 1} + \beta_2^{ij} s^{\delta_j - 2} + \cdots + \beta_{\delta_j}^{ij}}{s^{\delta_j} + \alpha_1^j s^{\delta_j - 1} + \cdots + \alpha_{\delta_j}^j}$$

$$\beta^{ij} = \begin{bmatrix} \beta_{\delta_j}^{ij} \\ \beta_{\delta_j - 1}^{ij} \\ \vdots \\ \beta_1^{ij} \end{bmatrix}$$

$$\alpha^j = \begin{bmatrix} \alpha_{\delta_j}^j \\ \alpha_{\delta_j - 1}^j \\ \vdots \\ \alpha_1^j \end{bmatrix}$$

تحقق کانونیکال کنترل پذیر:

$$g_{ij}(s) = \frac{\beta_1^{ij} s^{\delta_j - 1} + \beta_2^{ij} s^{\delta_j - 2} + \cdots + \beta_{\delta_j}^{ij}}{s^{\delta_j} + \alpha_1^j s^{\delta_j - 1} + \cdots + \alpha_{\delta_j}^j}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_{\delta_j}^j & -\alpha_{\delta_j - 1}^j & \cdots & -\alpha_1^j \end{bmatrix}, b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \left[\beta^{ij} \right]^T$$

ترکیب تحقق های کانونیکال کنترل پذیر برای سیستم چندمتغیره:

$$A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lm} \end{bmatrix}$$

- **یک مثال**

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)^2} & \frac{s-2}{(s+3)^2} \end{bmatrix}$$

داریم

$$g_1(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)^2} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s-1)^2(s+3)^2}\begin{bmatrix} (s+3)^2 \\ -6(s-1) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^4+4s^3-2s^2-12s+9}\begin{bmatrix} s^2+6s+9 \\ -6s+6 \end{bmatrix}$$

از اینرو $\delta_1=4$. توجه کنید که ماتریس‌های حالت و ورودی تحقق‌های کنترل‌پذیر $g_{11}(s)$ و $g_{12}(s)$ یکسان هستند ولی ماتریس‌های خروجی آنها تفاوت می‌کند. از $g_1(s)$ ، بدست می‌آوریم

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-9&12&2&-4\end{bmatrix}\qquad b_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}c_{11}&=\left[\beta^{11}_{\delta_1}\right]^T=\begin{bmatrix}9&6&1&0\end{bmatrix}\\ c_{21}&=\left[\beta^{21}_{\delta_1}\right]^T=\begin{bmatrix}6&-6&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

از $g_2(s)$ نیز، بدست می‌آوریم

$$g_2(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s-1)(s+3)}\\ \dfrac{s-2}{(s+3)^2}\end{bmatrix}=\frac{1}{(s-1)(s+3)^2}\begin{bmatrix}s+3\\ s^2-3s+2\end{bmatrix}$$

از اینرو $\delta_2=3$ و لذا

$$A_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-9&-3&-5\end{bmatrix}\qquad b_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}c_{12}&=\left[\beta^{12}_{\delta_2}\right]^T=\begin{bmatrix}3&1&0\end{bmatrix}\\ c_{22}&=\left[\beta^{22}_{\delta_2}\right]^T=\begin{bmatrix}2&-3&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

بنابراین تحقق کامل کنترل‌پذیر از معادله (۳-۵-۳) به صورت زیر است

$$A_c=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc:ccc}0&1&0&0&&&\\0&0&1&0&&0&\\0&0&0&1&&&\\-9&12&2&-4&&&\\ \hdashline &&&&0&1&0\\&0&&&0&0&1\\&&&&9&-3&-5\end{array}\right]$$

$$B_c=\begin{bmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}0&\\0&\\0&0\\1&\\ \hdashline &0\\0&0\\&1\end{array}\right]$$

$$C_c=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&6&1&0&3&1&0\\6&-6&0&0&2&-3&1\end{bmatrix}$$

- **تحقق قطری (گیلبرت) فضای حالت**

حالت اول: ماتریس تابع تبدیل با قطب های غیر تکراری حقیقی

فرض کنید که:

$$\Lambda = diag\left\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\right\}, B_n, C_n, D$$

$$D = \lim_{s \to \infty} G(s)$$

از صورت اسمیث مک میلان محاسبه می شود.

داریم

$$G(s) = C_n \, diag\left\{s-\lambda_1, \cdots, s-\lambda_n\right\} B_n + D = \sum_{k=1}^{n} \frac{G_k}{s-\lambda_k} + D$$

مانده های ماتریس تابع تبدیل هستند:

$$G_k = \lim_{s \to \lambda_k} (s-\lambda_k) G(s)$$

and

$$G_k = c_{nk} b_{nk}^T$$

kامین ستون و ردیف ماتریس خروجی و ورودی

• یک مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+4} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0 \end{bmatrix}$$

از (۳-۵-۷)، داریم

$$G_1=\lim_{s\to -1}(s+1)G(s)=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\1&2&0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{c_{n_1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0\end{bmatrix}}_{b_{n_1}^T}$$

به طور مشابهی

$$G_2=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}}_{c_{n_2}}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}}_{b_{n_2}^T}\qquad G_3=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}_{c_{n_3}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}}_{b_{n_3}^T}\qquad G_4=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{c_{n_4}}\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}}_{b_{n_4}^T}$$

بنابراین تحقق عبارتست از

$$\Lambda=\mathrm{diag}\{-1,-2,-3,-4\}\qquad B_n=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad C_n=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\1&-2&0&0\end{bmatrix}$$

همانطورکه مشاهده می‌شود، $s=-3$ یک قطب رؤیت‌ناپذیر سیستم است، با حذف این قطب یک تحقق مرتبه سوم و می‌نیمال به صورت زیر خواهیم داشت

$$\Lambda=\mathrm{diag}\{-1,-2,-4\}\qquad B_n=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad C_n=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-2&0\end{bmatrix}$$

حالت دوم: ماتریس تابع تبدیل با قطب های تکراری حقیقی

برای ساده تر شدن مساله فرض کنید که ماتریس تابع تبدیل یک قطب های مکرر با تعدد ۳ دارد. بسط کسرهای جزیی می دهد:

$$G(s)=\frac{1}{(s-\lambda)^3}M_1+\frac{1}{(s-\lambda)^2}M_2+\frac{1}{(s-\lambda)}M_3$$

و

$$rank\,(M_1)=r_1 \qquad \left\{b_{l1},\cdots,b_{lr_1}\right\}$$

$$rank\begin{bmatrix}M_1\\M_2\end{bmatrix}=r_2 \longrightarrow \left\{b_{l1},\cdots,b_{lr_1},b_{l(r_1+1)},\cdots,b_{lr_2}\right\}$$

$$rank\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}=r_3 \qquad \left\{b_{l1},\cdots,b_{lr_1},b_{l(r_1+1)},\cdots,b_{lr_2},b_{l(r_2+1)},\cdots,b_{lr_3}\right\}$$

نکته: $r_1 \le r_2 \le r_3 \le m$

با تعریف بردارهای ستونی مناسب، داریم:

$$M_1 = c_{11} b_{l1} + c_{12} b_{l2} + \cdots + c_{1r_1} b_{lr_1}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{l1} \\ b_{l2} \\ \vdots \\ b_{lr_1} \end{bmatrix} \triangleq C_{r_1}^{l} B_{r_1}^{l}$$

$$\Rightarrow C_{r_1}^{l} = M_1 (B_{r_1}^{l})^T [B_{r_1}^{l} (B_{r_1}^{l})^T]^{-1}$$

به طور مشابه:

$$M_2 = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{l1} \\ b_{l2} \\ \vdots \\ b_{lr_2} \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{l1} \\ b_{l2} \\ \vdots \\ b_{lr_3} \end{bmatrix}$$

نکته ۱: r_3 بلوک جردن وجود دارد. اولین r_1 بلوک جردن بعدی برابر تعدد قطب متناظر با M_1 دارند.

نکته ۲: دومین $r_2 - r_1$ بلوک های جردن بعدی برابر تعدد قطب متناظر با M_2 دارند.

نکته ۳: سومین $r_3 - r_2$ بلوک های جردن بعدی برابر تعدد قطب متناظر با M_1 دارند.

نکته ۴: تحقق کنترل پذیر است ولی لزوما رویت پذیر نیست.

- **یک مثال**

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}M_1+\frac{1}{(s+1)}M_2\Rightarrow G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+1)}0$$

$$\Rightarrow r(M_1)=2=r_1,\ \text{and}\ M_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix})=2=r_2,\ \text{and the number of Jordan blocks of order 2 is 2 and 1 is 0.}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

- یک مثال

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+2)}\\ \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}\Rightarrow M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}M_1+\frac{1}{(s+1)}M_2+\frac{1}{(s+2)}M$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+1)}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+2)}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(M_1)=1=r_1,\ \text{and}\ \ M_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\ \text{one Jordan block of order 2.}$$

$$\Rightarrow r(\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix})=1=r_2,\ \text{and}\ M_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\ r_2-r_1=\text{zero Jordan block of order 1.}$$

$$\Rightarrow r(M) = 1, \text{ and } M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

- یک مثال

$$G(s)=\frac{1}{s^4}\begin{bmatrix} s^3-s^2+1 & 1 & -s^3+s^2-2 \\ 1.5s+1 & s+1 & -1.5s-2 \\ s^3-9s^2-s+1 & -s^2+1 & s^3-s-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{s^4}M_1+\frac{1}{s^3}M_2+\frac{1}{s^2}M_3+\frac{1}{s}M_4$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{s^4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}+\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & -1.5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow r(M_1) = 1 = r_1, \text{ and } M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ one Jordan block of order 4.}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & -1.5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}) = 2 = r_2, \text{ and } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

and $r_2 - r_1 =$ one Jordan block of order 3.

$$M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}) = 3 = r_3, \text{ and } M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and $r_3 - r_2 =$ one Jordan block of order 2.

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}) = 3 = r_4, \text{ and } r_4 - r_3 = \text{zero Jordan block of order 1.}$$

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
 & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & \\
 & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & 0 & & \\
 & 0 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 0
\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1
\end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 3 & 0
\end{bmatrix} x
$$

The Plant
is
Controllable
but
Unobservable

- **کاهش مرتبه معادلات فضای حالت**
  - معادلات فضای حالت غیر می نیمال
  - معادلات فضای حالت می نیمال

- **کاهش مرتبه سیستم های غیرمی نیمال**

تحقق کانونیکال کنترل پذیر:

$$
\mathrm{P}(s)=\begin{bmatrix} sI_{\delta_1}-A_1 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ 0 & sI_{\delta 2}-A_2 & & & B_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI_{\delta_m}-A_m & B_m \\ -C_1 & -C_2 & \cdots & -C_m & D(s) \end{bmatrix}
$$

می توان با اجرای عملیات مناسب صفرهای دکوپله خروجی را شناسایی و حذف کرد:

$$\overline{\mathrm{P}}(s)=\begin{bmatrix} sI_u-A_u & A_{12} & B_u \\ 0 & sI_o-A_o & B_o \\ 0 & -C_o & D(s) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{P}_{\min}(s)=\begin{bmatrix} sI_o-A_o & B_o \\ -C_o & D(s) \end{bmatrix}$$

دو نکته:

- روند مشابه برای سیستم های کنترل ناپذیر
- اعمال الگوریتم بر روی:

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

- **یک مثال**

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید [8]

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

یک تحقق به صورت همبسته رؤیت‌پذیر از $G(s)$ عبارتست از

$$P(s)=\left[\begin{array}{ccc:ccc:cc} s & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ -1 & s & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & s+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & s & 0 & 4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 8 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & s+5 & 0 & 1\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

این تحقق رؤیت‌پذیر است، لیکن لزوماً کنترل‌پذیر نیست. برای تعیین مودهای احتمالی کنترل ناپذیر از الگوریتم بالا استفاده می‌کنیم ولی نخست صورت (۳-۶-۱۰) را می‌نویسیم

$$N=\left[\begin{array}{ccc:ccc:cc} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بعد از اعمال الگوریتم بالا داریم

$$N=\left[\begin{array}{cc:cccc:cc} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

با مقایسه با معادله (۳-۶-۷) داریم که A_{11} یک بلوک 2×2 است و لذا ۲ مود کنترل‌ناپذیر (صفر دکوپله ورودی) وجود دارد. با حذف اولین دو ردیف و ستون از N، یک نمایش فضای حالت می‌نیمال از $G(s)$ به صورت زیر و با مقایسه با معادله (۳-۶-۹) بدست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪ کاهش مرتبه معادلات فضای حالت می نیمال

معادلات فضای حالت و خروجی کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{A}\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}\mathbf{u}(t) \qquad (۱۰-۵-۴)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{C}\mathbf{x}(t) + \mathrm{D}\mathbf{u}(t) \qquad (۱۱-۵-۴)$$

که در آن $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ و $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ و ماتریس‌های ثابت C ,B ,A و D با ابعاد مناسب هستند. فرض کنید که بخواهیم مرتبه‌ی سیستم می‌نیمال را از n، به k کاهش دهیم. به عبارت دیگر، سیستم داده شده با معادلات (۴-۵-۱۰) و (۴-۵-۱۱) را با معادلات مرتبه‌ی kیی چنان نمایش دهیم که مشخصه‌های اصلی سیستم حفظ شده و خطای کاهش مرتبه حداقل باشد.

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + Du \end{cases}$$

- دو روش متداول:

روش برش

روش مانده گذاری

- **روش برش**

$$\dot{\mathbf{x}}_۱(t) = A_{۱۱}\mathbf{x}_۱(t) + B_۱\mathbf{u}(t) \qquad (۱۵\text{-}۵\text{-}۴)$$

$$\mathbf{y}(t) = C_۱\mathbf{x}_۱(t) + D\mathbf{u}(t) \qquad (۱۶\text{-}۵\text{-}۴)$$

ماتریس‌های تابع تبدیل متناظر با معادلات اصلی و مرتبه کاهش یافته‌ی سیستم را به ترتیب با $G(s)$ و $G_r(s)$ نمایش دهید. بدیهی است که $G_r(\infty) = G(\infty) = D$ و لذا کاهش مرتبه به روش بُرِش، پاسخ فرکانس بالای سیستم را تغییر نمی‌دهد.

حالت قطری:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_۱ & & ۰ & \\ & \lambda_۲ & & \\ & & \ddots & \\ & ۰ & & \lambda_n\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}\mathrm{b}_۱^{\mathrm{T}}\\ \mathrm{b}_۲^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \mathrm{b}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{c}_۱ & \mathrm{c}_۲ & \cdots & \mathrm{c}_n\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

که در آن مقادیر ویژه سیستم به صورت $|\lambda_n| > \cdots > |\lambda_۲| > |\lambda_۱|$ مرتب شده‌اند. اگر با بُرِش، $n-k$ مودهای سریع سیستم را حذف کنیم داریم

$$\dot{\mathbf{x}}_۱(t)=\begin{bmatrix}\lambda_۱ & & ۰ & \\ & \lambda_۲ & & \\ & & \ddots & \\ & ۰ & & \lambda_k\end{bmatrix}\mathbf{x}_۱(t)+\begin{bmatrix}\mathrm{b}_۱^{\mathrm{T}}\\ \mathrm{b}_۲^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \mathrm{b}_k^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \qquad (۱۹\text{-}۵\text{-}۴)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{c}_۱ & \mathrm{c}_۲ & \cdots & \mathrm{c}_k\end{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_۱(t) \qquad (۲۰\text{-}۵\text{-}۴)$$

بدیهی است که در این حالت (بُرِش مدال) خطای مدل‌سازی را می‌توان با تفاضل ماتریس‌های تابع تبدیل متناظر با (۴-۵-۱۷)، (۴-۵-۱۸) و (۴-۵-۱۹)، (۴-۵-۲۰) به صورت زیر تعیین کرد

$$\mathrm{G}(s)-\mathrm{G}_r(s)=\sum_{i=k+۱}^{n}\frac{\mathrm{c}_i\mathrm{b}_i^{\mathrm{T}}}{s-\lambda_i} \qquad (۲۱\text{-}۵\text{-}۴)$$

این معادله مقدار خطای کاهش مرتبه را بیان می‌کند و در آن $c_i b_i^T$ ماتریس مانده تابع تبدیل از قطب λ_i است.

همان‌طور که به‌سادگی مشاهده می‌شود مقدار خطا به موقعیت قطب و ماتریس مانده بستگی دارد. با گرفتن نرم بی‌نهایت از معادله (۴-۵-۲۱) داریم

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\overline{\sigma}\left(c_i b_i^T\right)}{|\mathrm{Re}(\lambda_i)|}$$

که در آن $\overline{\sigma}(\cdot)$ بزرگ‌ترین مقدار استثنایی را نشان می‌دهد. لذا در تحلیل کاهش مرتبه به روش بُرش باید علاوه بر دوری قطب از محور موهومی به مقدار بزرگ‌ترین مقدار استثنائی ماتریس مانده‌ی آن قطب نیز توجه کرد و موقعیت قطب به تنهایی معیار دقیقی برای حذف یا نگهداری یک قطب در مدل مرتبه کاهش یافته نیست.

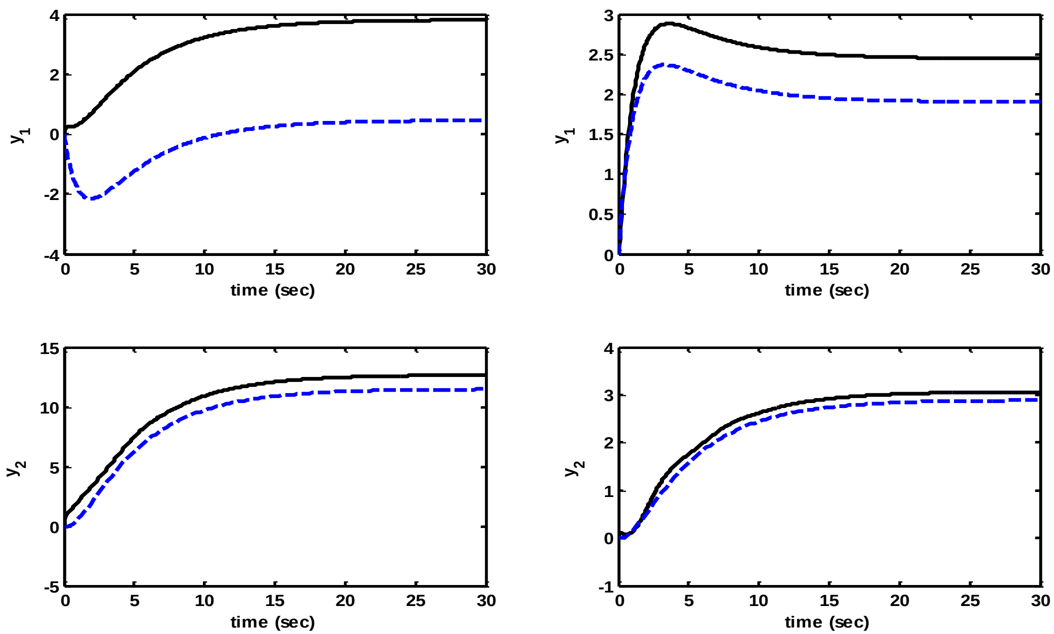
توجه کنید که در مدل مرتبه کاهش یافته با روش بُرِش مدال، قطب‌های سیستم مرتبه کاهش یافته تعدادی از قطب‌های سیستم اصلی هستند.

- **مثال**: توربین گازی ۲x۲ با ۱۲ متغیر حالت

جدول ۴-۴ مقادیر استثنایی هانکل

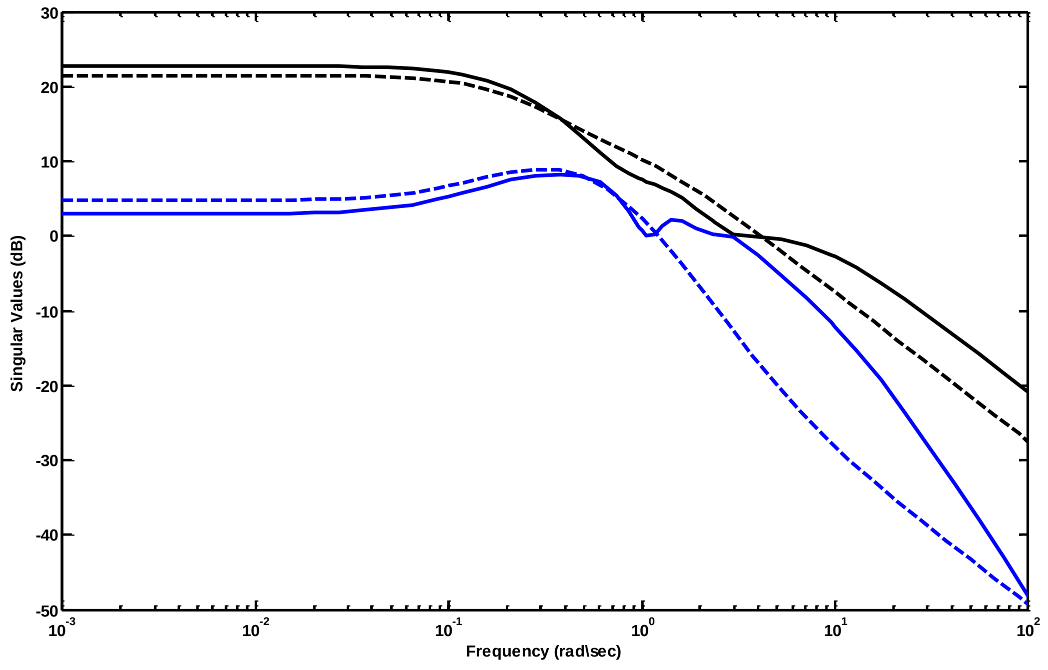
۱) ۷/۱۸۳۳e+۰	۵) ۴/۶۳۳۱e-۱	۹) ۵/۶۵۹۶e-۴
۲) ۱/۴۹۰۴e+۰	۶) ۲/۳۶۸۳e-۱	۱۰) ۲/۰۶۰۸e-۵
۳) ۹/۲۷۹۰e-۱	۷) ۱/۶۱۳۲e-۱	۱۱) ۱/۴۱۲۴e-۶
۴) ۵/۸۷۵۵e-۱	۸) ۹/۳۵۸۲e-۲	۱۲) ۳/۳۳۴۳e-۸

- پاسخ های خروجی:



(ب) (الف)

- مقادیر استثنایی:



▪ روش مانده گذاری

یک دسته متغیر از دسته متغیرهای حالت دیگر سریع ترند.

$$0 = A_{21}\mathbf{x}_1(t) + A_{22}\mathbf{x}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t)$$

که با فرض $A_{22} \neq 0$ و حل معادله برای $\mathbf{x}_2(t)$، معادلات سیستم به صورت زیر کاهش می‌یابند

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)\mathbf{x}_1(t) + \left(B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2\right)\mathbf{u}(t) \qquad (۲۲\text{-}۵\text{-}۴)$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}\right)\mathbf{x}_1(t) + \left(D - C_2A_{22}^{-1}B_2\right)\mathbf{u}(t) \qquad (۲۳\text{-}۵\text{-}۴)$$

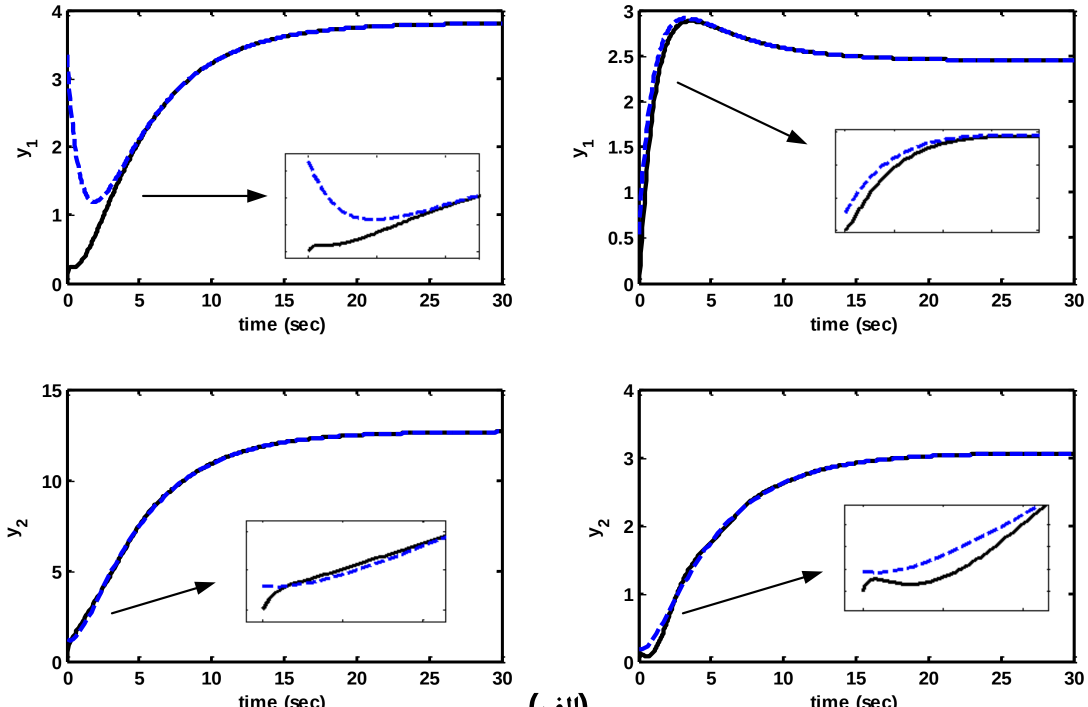
ماتریس تابع تبدیل سیستم کاهش یافته در حالت ماندگار عبارت است از

$$G_r(0) = -\left(C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}\right)\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}\left(B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2\right) + D - C_2A_{22}^{-1}B_2$$

داریم که

$$G_r(0) = G(0)$$

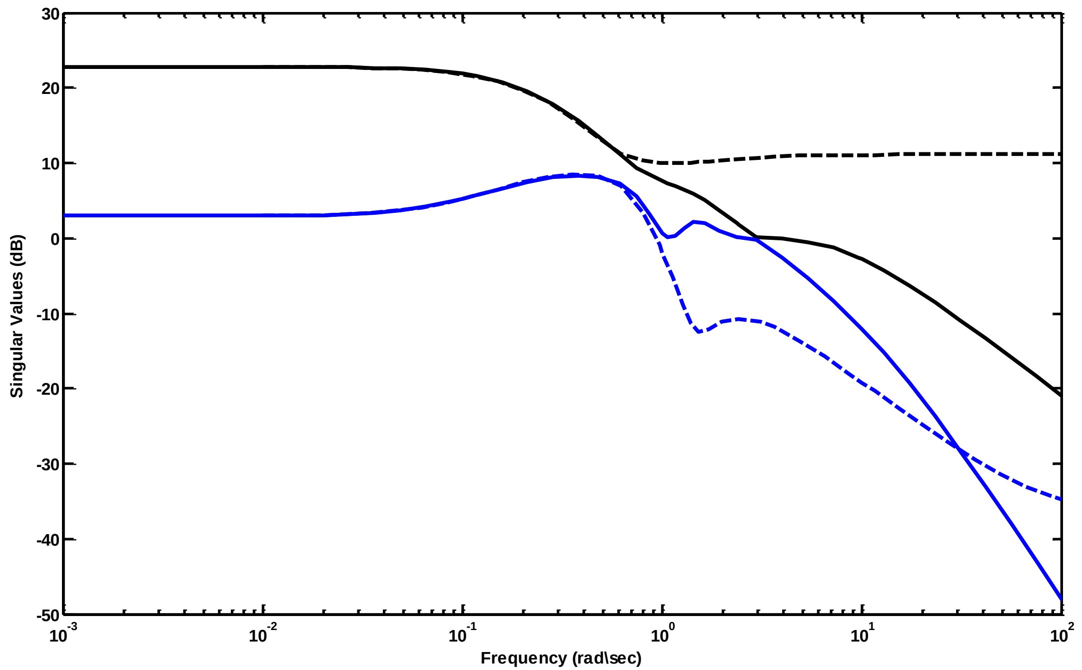
- **مثال**: توربین گازی ۲x۲ با ۱۲ متغیر حالت و کاهش مرتبه به روش مانده گذاری. پاسخ های خروجی:



(الف)

(ب)

■ مقادیر استثنایی:



- انتخاب مرتبه مدل دینامیکی

تحقق های بالانس شده

- گرامیان های کنترل پذیری و رویت پذیری:

$$P = \int_{۰}^{\infty} e^{At}BB^{T}e^{A^{T}t}dt$$

$$Q = \int_{۰}^{\infty} e^{A^{T}t}C^{T}Ce^{At}dt$$

می‌توان نشان داد که این گرامیان‌ها معادلات لیاپانوف زیر را برآورده می‌سازند

$$AP + PA^{T} + BB^{T} = ۰ \qquad (۲۶\text{-}۵\text{-}۴)$$

$$A^{T}Q + QA + C^{T}C = ۰ \qquad (۲۷\text{-}۵\text{-}۴)$$

در واقع تحققی را بالانس شده گویند که گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری آن قطری و مساوی باشند. به عبارت دیگر،

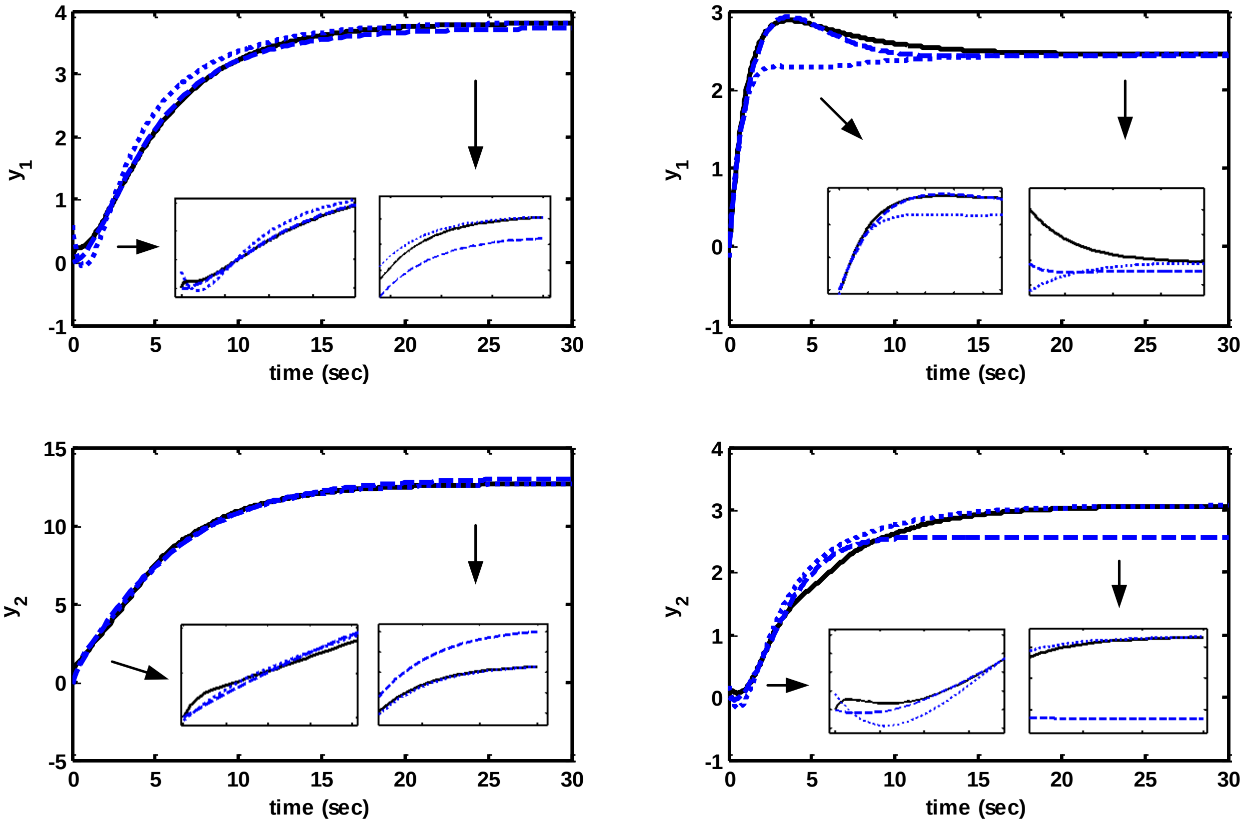
$$P = Q = \Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_{۱} \quad \sigma_{۲} \quad \cdots \quad \sigma_{n}\} \qquad (۲۸\text{-}۵\text{-}۴)$$

که در آن $\sigma_i \geq \sigma_{i+۱}$ برای $i = ۱,۲,\dots,n-۱$. تحقق‌های پایدار می‌نیمال را می‌توان با تبدیل‌های همانندی مناسب به صورت بالانس شده تبدیل کرد که یک روش آن در ادامه خواهد آمد.

- برش بالانس شده
- مانده گذاری بالانس شده

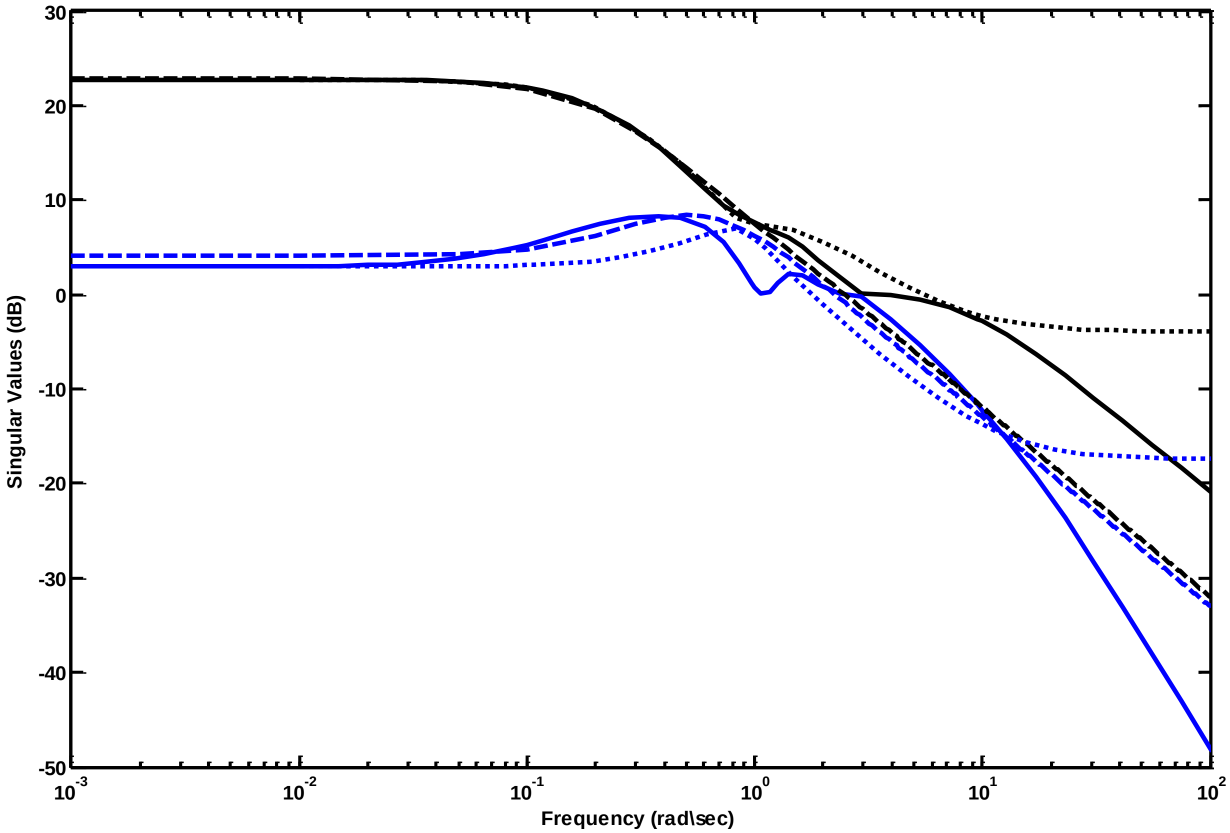
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{۱} & ۰ \\ ۰ & \Sigma_{۲} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq ۲\left(\sigma_{k+۱} + \cdots + \sigma_n\right) = ۲tr\left(\Sigma_{۲}\right)$$

- **مثال**: توربین گازی ۲x۲ با ۱۲ متغیر حالت و کاهش مرتبه به روش برش و مانده گذاری بالانس شده. پاسخ های خروجی:



(ب) (الف)

■ مقادیر استثنایی:



- **کنترل دکوپله سازی**

مساله طراحی: طراحی دو مرحله ای

مرحله اول: دکوپله سازی ماتریس تابع تبدیل سیستم با پیش جبران سازی یا فیدبک و به دست آوردن ماتریس تابع تبدیل قطری.

مرحله دوم: طراحی جبران سازهای مناسب در هر کانال کنترلی.

فرض کنید که:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{m\times n}$$
$$\text{rank}B = \text{rank}C = m$$

با فرض معکوس پذیری ماتریس تابع تبدیل سیستم مربعی داریم:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
$$|D| \neq 0 \Rightarrow G^{-1}(s) = -D^{-1}C(sI - A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1}$$

با این فرضیات می توان از معکوس ماتریس تابع تبدیل سیستم مربعی (*ماتریس گویا*) برای پیش جبران سازی استفاده کرد.

اگر

$$|D| = 0$$

با فرض معکوس پذیری ماتریس تابع تبدیل سیستم مربعی، معکوس آن ناسره است. برای حل این مشکل اندیس های زیر را تعریف کنید:

$$d_i \geq 0 (i = 1, \cdots, m), \text{ s.t. } D_d(s) \triangleq diag\left\{s^{d_1}, \cdots, s^{d_m}\right\}$$

$$\text{is s.t. } B^* \triangleq \lim_{|s| \to \infty} D_d(s) G(s)$$

exists and every row of B^* has at least one non zero element.

این اندیس ها یکتا هستند و برابر با کم ترین درجه نسبی توابع تبدیل در هر ردیف از ماتریس تابع تبدیل هستند.

این اندیس ها از تحقق فضای حالت به صورت زیر قابل محاسبه اند:

$$d_i \triangleq \begin{cases} 0 & \text{if the ith row of } D \neq 0 \\ \min\left\{k > 0 \middle| c_i^T A^{k-1} B \neq 0\right\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

این اندیس ها را اندیس های دکوپله سازی (Decoupling indices) می نامند. و

$$d_i \leq n$$

ماتریس به دست آمده از اندیس های دکوپله سازی زیر را ماتریس دکوپله سازی (Decoupling matrix) می نامند:

$$B^* = \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1 - 1}B \\ c_2^T A^{d_2 - 1}B \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m - 1}B \end{bmatrix}$$

نکته مهم: تعبیر حوزه فرکانسی و زمانی از

$$B^*, G(j\omega_b), G(0)$$

مثال ۴–۲۰، ۴–۲۱

قضیه اگر

$$\left|B^{*}\right| \neq 0$$

آنگاه کنترل فیدبک حالت زیر

$$u(t)=\left(B^{*}\right)^{-1}\left[-\mathrm{B}x(t)+v(t)\right]$$

که در آن

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1} \\ c_2^T A^{d_2} \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m} \end{bmatrix}$$

سیستم را دکوپله می سازد و ماتریس تابع تبدیل سیستم دکوپله شده عبارت است از:

$$D_d^{-1}(s) \triangleq diag\left\{s^{-d_1},\cdots,s^{-d_m}\right\}$$

اثبات. داریم

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$$

$$\ddot{y} = C\ddot{x} = CA\dot{x} + CB\dot{u} = CA^2x + CABu + CB\dot{u}$$

$$\vdots$$

با توجه به تعریف اندیس های دکوپله سازی، و بررسی هر کدام از خروجی ها در بردار خروجی داریم

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d^{d_1}y}{dt^{d_1}} \\ \dfrac{d^{d_2}y}{dt^{d_2}} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{d_m}y}{dt^{d_m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1} \\ c_2^T A^{d_2} \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1-1}B \\ c_2^T A^{d_2-1}B \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m-1}B \end{bmatrix} u$$

$$= \mathrm{B}x + B^{*}u$$

اگر ورودی جدید را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$v \triangleq D_d(s)y \quad \text{or} \quad y \triangleq D_d^{-1}(s)v$$

توجه کنید که سیستم با ورودی جدید قطری است و با استفاده از تحقق فضای حالت داریم

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$v = \mathrm{B}x + B^{*}u$$

که قانون کنترل زیر را می دهد:

$$u = \left(B^{*}\right)^{-1}\left[-\mathrm{B}x + v\right]$$

سیستم داده شده زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

با اعمال فیدبک حالت دکوپله ساز داریم

$$\dot{x} = \left(A - B\left(B^{*}\right)^{-1}\mathrm{B}\right)x + B\left(B^{*}\right)^{-1}v$$
$$y = \left(C - D\left(B^{*}\right)^{-1}\mathrm{B}\right)x + D\left(B^{*}\right)^{-1}v$$

که یک تحقق از رابطه ورودی-خروجی زیر است:

$$y = D_d^{-1}(s)v$$

- **چند نکته:**
  - تمام قطب های سیستم دکوپله شده در مبدا قرار دارند.
  - سیستم دکوپله شده صفر انتقال محدود ندارد.
  - تمام صفرهای انتقال محدود سیستم جبران نشده با قطب های جبران ساز حذف شده اند..
  - صفرهای انتقال ناپایدار یک محدودیت کلیدی.
  - مرحله دوم طراحی: براورده کردن ملزومات حلقه بسته.

- یک مثال

$$G(s)=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ MP Plant}$$

A Minimal Realization:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1^T B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow d_1 = 1$$

$$c_2^T B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow c_2^T AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow d_2 = 2$$

$$\Rightarrow B^* = \begin{bmatrix} c_1^T B \\ c_2^T AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{which is nonsingular,}$$

and

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} c_1^T A \\ c_2^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + v \right)$$

And the compensated plant is:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

which gives:

$$D_d^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$