# پایداری و عملکرد مقاوم سیستم های چندمتغیره

علی خاکی صدیق

گروه کنترل- آبان ۱۳۹۴

## مقدمه

- روش هایی از قبیل نایکوئیست، مکان ریشه، و ... همگی بر ایده *مقدار* ویژه استوارند.
- فرض کلیدی در روش های تحلیل پایداری و عملکرد سیستم های کنترل با استفاده از *مقدار* ویژه: ماتریس تابع تبدیل یا نمایش فضای حالت سیستم *دقیق* است.
- یک پرسش مهم: آیا *حاشیه های بهره مقدار ویژه* و *حاشیه های فاز مقدار ویژه* می توانند استنتاجی در رابطه با پایداری مقاوم سیستم واقعی که سیستم هایی نامعین هستند، داشته باشند؟

- منابع نامعینی در سیستم های واقعی:
  - نادیده گرفتن ماهیت غیرخطی فرایند.
  - کاهش مرتبه و نادیده گرفتن مودهای سریع سیستم.
  - مدل نکردن برخی از قسمت های حلقه کنترلی.
  - تغییر پارامترهای سیستم با تغییرات در شرایط کاری و نقطه کار سیستم.
  - مساله عیب یا از کارافتادگی بخشی از سیستم.
  - ...

- **مثال های توصیفی**

مثال ۶-۱ مقاومت کنترل بهینه

- رگلاتورهای LQ و رگلاتورهای LQG : مطالعات نقطه نامی و بدون نامعینی این روش‌های کنترل بهینه نشان می‌دهد که حتی در حالت چندمتغیره، سیستم حاشیه‌های فاز ۶۰ درجه و حاشیه‌های بهره از ۶db- تا ∞db+ تضمین شده در تمام کانال‌ها

- حاشیه‌های تضمین شده: there are none

سیستم زیر را با شرایط اولیه غیرصفر $\mathbf{x}_0$ در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

شاخص عملکرد متناظر عبارت است از

$$J = \int_0^{\infty} \left[ y^2(t) + r u^2(t) \right] dt \qquad r > 0$$

می‌توان نشان داد که بردار فیدبک حالت بهینه در $u(t) = -\mathbf{k}\mathbf{x}(t)$ عبارت است از

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 + q - \sqrt{5 + 2q} & \quad 2\sqrt{5 + 2q} - q - 4 \end{bmatrix}$$

که در آن $q = \sqrt{4 + 1/r}$، اکنون اگر فرض کنیم که مقدار کمی نامعینی در عنصر اول بردار ورودی وجود دارد، داریم

$$b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$$

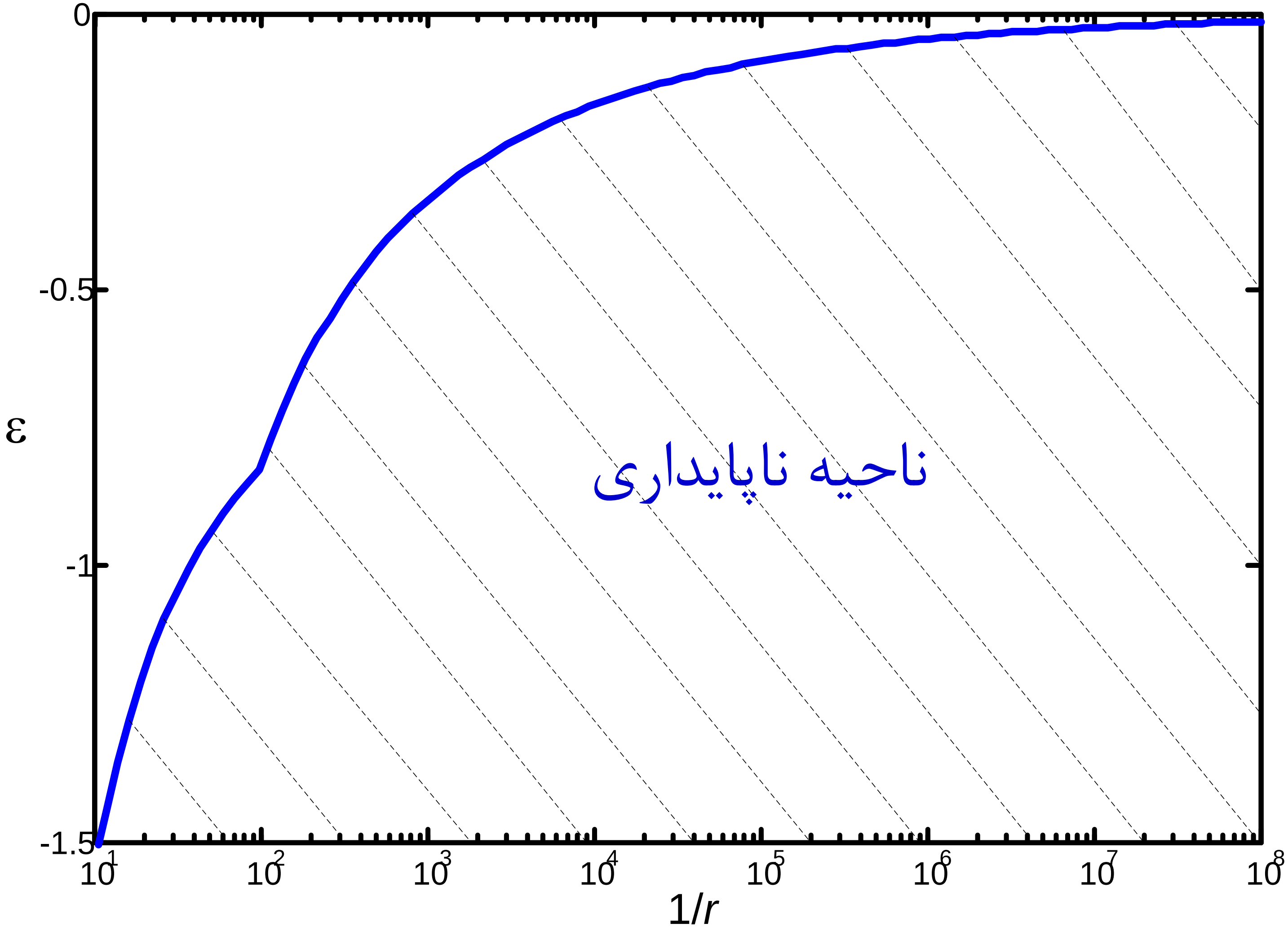
اگر معادله‌ی مشخصه حلقه بسته را با طراحی بهینه $\mathbf{k}$ و در حضور $b_\varepsilon$ به دست آوریم، خواهیم داشت

$$\text{معادله مشخصه حلقه بسته با نامعینی} = s^2 + d_1 s + d_2$$

که در آن

$$d_1 = \left(1 - \varepsilon\right)\sqrt{5 + 2q} + \varepsilon\left(1 + q\right)$$
$$d_2 = \left(1 + 2\varepsilon\right) q + 2\varepsilon\left(1 - \sqrt{5 + 2q}\right)$$

پایداری سیستم حلقه بسته:



# مثال ۶-۲ سیستم های قطری مثلثی

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ ۰ & g_{22}(s) \end{bmatrix}$$

# مثال ۶-۳ قطری سازی در کنترل سیستم های چندمتغیره بر اساس مقدار ویژه

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} 2-47s & 56s \\ -42s & 50s+2 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $G(s)$ عبارت‌اند از $\frac{1}{s+1}$ و $\frac{2}{s+2}$. می‌توان نشان داد که برای این سیستم داریم

$$\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} G(s) \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} = G_d(s)$$

$$K_d = \begin{bmatrix} k_{1d} & 0 \\ 0 & k_{2d} \end{bmatrix}$$

را به سیستم قطری‌سازی شده اِعمال کنیم، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی واحد عبارت است از

$$G_{cld}(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_{1d}}{s+1+k_{1d}} & 0 \\ 0 & \frac{2k_{2d}}{s+2+2k_{2d}} \end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -8\\ -6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته اصلی عبارت است از

$$s^2+3\left(1+k\right)s+2\left(1+k\right)^2=0$$

و برای $k>-1$ پایدار است. حال اگر مقداری نامعینی در $k$ باشد، نشان خواهیم داد که سیستم اصلی خاصیت پایداری حالت نامی را از دست می‌دهد. در نظر بگیرید

$$K=\begin{bmatrix}k+\delta & 0\\ 0 & k-\delta\end{bmatrix}$$

در این حالت، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته اصلی عبارت است از

$$s^2+\left(3+3k-97\delta\right)s+2\left(\left(1+k\right)^2-\delta^2\right)=0$$

و شرایط پایداری حلقه بسته عبارت‌اند از

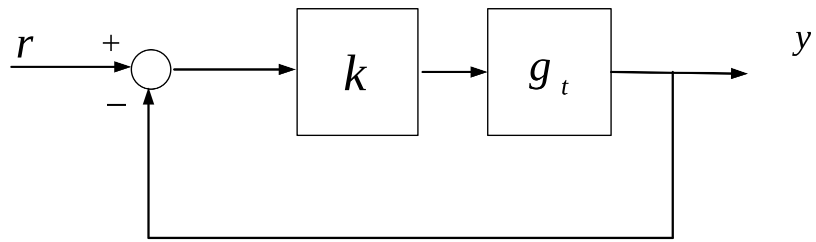
$$3\left(1+k\right)>97\delta$$
$$\left(1+k\right)^2>\delta^2$$

- نتیجه گیری کلیدی:

مقادیر ویژه سیستم حلقه باز، اطلاعات مفیدی در رابطه با *پایداری* سیستم *نامی* به دست می دهد. لیکن، مقادیر ویژه اطلاعات قابل اعتمادی در رابطه با سیستم نامعین یا *پایداری مقاوم* به دست نمی دهد.

## مقادیر استثنایی و تابع حساسیت

سیستم های SISO:



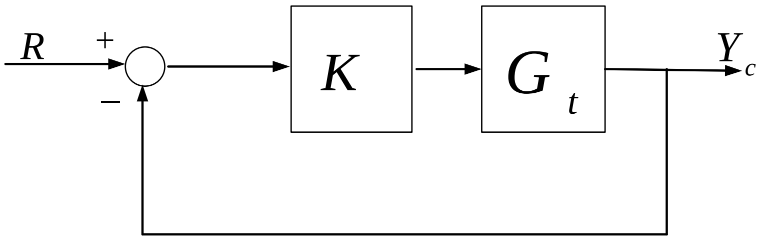

$$h=\frac{g_t k}{1+g_t k}\Rightarrow S_{g_t}^{h}=\frac{\partial h}{\partial g_t}\frac{g_t}{h}$$

$$=\frac{k}{(1+g_t k)^2}\frac{1+g_t k}{k}$$

$$=\frac{1}{1+g_t k}$$

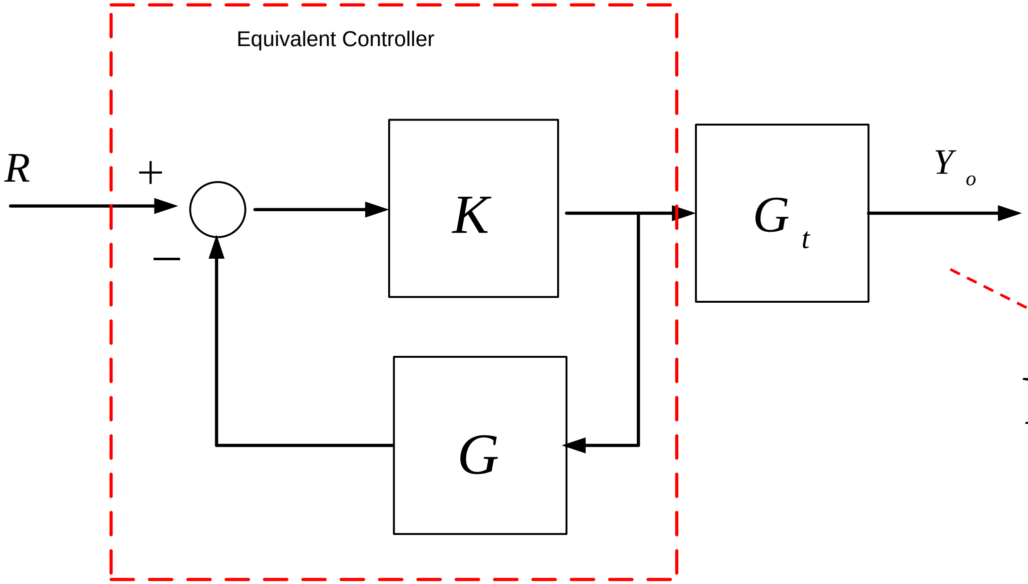
**<u>*اندازه*</u> تابع حساسیت، بیانگر میزان اثر تغییرات سیستم بر تابع تبدیل حلقه بسته است.**

## تعمیم به سیستم های MIMO:




$$Y_c = G_t K \left(I + G_t K\right)^{-1} R$$

معادل حلقه باز، که در آن طراحی بر اساس مدل نامی حلقه باز انجام شده و به سیستم اصلی اعمال گردیده است :




$$Y_o = G_t K \left(I + GK\right)^{-1} R$$

توجه کنید که:

$$Y_c = G_t K \left(I + G_t K\right)^{-1} R = Y_o = G_t K \left(I + GK\right)^{-1} R \Leftrightarrow G = G_t$$

اما در سیستم های واقعی :

$$G_t \dashrightarrow G_t(\delta)$$

و لذا بررسی تغییر پارامتر در سیستم مهم است:

$$\frac{\partial Y_c}{\partial \delta} = \left(I + G_t K\right)^{-1} \frac{\partial G_t}{\partial \delta} K \left(I + GK\right)^{-1} R$$

$$\frac{\partial Y_o}{\partial \delta} = \frac{\partial G_t}{\partial \delta} K \left(I + GK\right)^{-1} R$$

$$\boxed{S = \left(I + GK\right)^{-1} \quad \text{Sensitivity function (operator)}}$$

فرض کنید که:

$$G = G_t(\delta_{nom})$$

آنگاه :

$$\left.\frac{\partial Y_c}{\partial \delta}\right|_{\delta=\delta_{nom}} = \left(I + G_t K\right)^{-1} \left.\frac{\partial Y_o}{\partial \delta}\right|_{\delta=\delta_{nom}}$$

$$= S \left.\frac{\partial Y_o}{\partial \delta}\right|_{\delta=\delta_{nom}}$$

و لذا تابع حساسیت میزان اثرگذاری تغییر پارامتر بر خروجی سیستم حلقه بسته را تعیین می کند: ایده "اندازه" ماتریس تابع حساسیت.

داریم

$$\left\| \frac{\partial Y_c(j\omega)}{\partial \delta} \right\|_{\delta=\delta_{nom}} \le \bar{\sigma}(S(j\omega)) \left\| \frac{\partial Y_o(j\omega)}{\partial \delta} \right\|_{\delta=\delta_{nom}}$$

$$\left\| \frac{\partial Y_c(j\omega)}{\partial \delta} \right\|_{\delta=\delta_{nom}} \ge \underline{\sigma}(S(j\omega)) \left\| \frac{\partial Y_o(j\omega)}{\partial \delta} \right\|_{\delta=\delta_{nom}}$$

<u>نتیجه گیری مهم:</u>

If $\bar{\sigma}(S(j\omega)) < 1$ Then,

CL plant is less sensitive to changes in plant parameters than the OL plant

If $\underline{\sigma}(S(j\omega)) > 1$ Then,

CL plant is more sensitive to changes in plant parameters than the OL plant

یک هدف طراحی سیستم های کنترل:

$$\boxed{\bar{\sigma}(S(j\omega)w(j\omega)) < 1}$$

$|w(j\omega)| \geq 1$ over the desired frequency range

and is the weighting function.

$$\Rightarrow \bar{\sigma}(S(j\omega)) < 1$$

<u>نتیجه گیری مهم:</u>

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)w(j\omega)) < 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega)) > |w(j\omega)|$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) > |w(j\omega)| - 1$$

Hence, good sensitivity reduction demands high gain control.

- **مدلسازی سیستم های نامعین چندمتغیره**

  - وارد کردن خطاهای مدلسازی یا *نامعینی* در تحلیل واقع بینانه سیستم های کنترل ضروری است.
  - توصیف نامعینی در مدلسازی:
    - توصیف آماری
    - توصیف غیر آماری بر حسب کران ها
  - توصیف بر حسب کران:
    - نامعینی پارامتری یا ساختاریافته
    - نامعینی بدون ساختار

- توصیف نامعینی بدون ساختار:
  - توصیف جمعی
  - توصیف ضربی

$$G_t = G + A$$

$$G_t = (I + \Delta_1)G$$

or

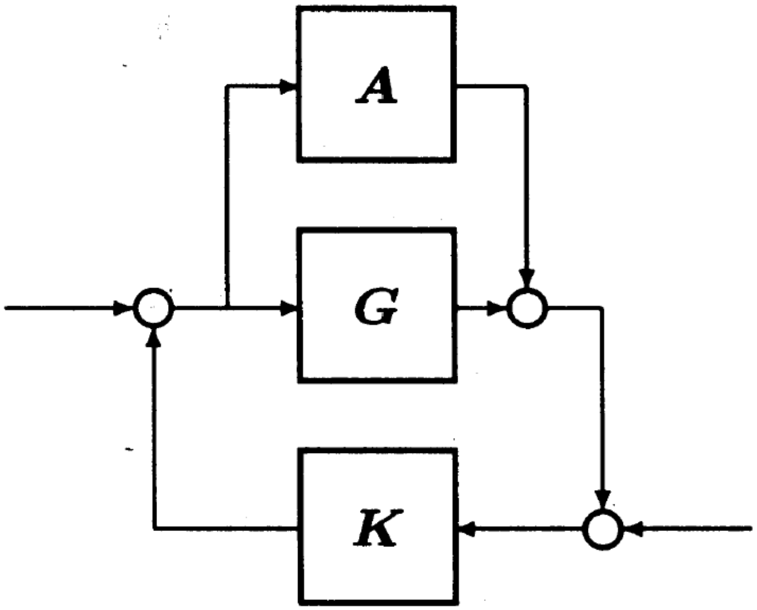
$$G_t = (I - \Delta_2)^{-1} G$$

- سایر نمایش های نامعینی بی ساختار
- نامعینی پارامتری

- **تحلیل پایداری مقاوم سیستم های چندمتغیره نامعین**
- پایداری نامی و پایداری مقاوم
- تحلیل پایداری مقاوم: حداکثر خطای مدلسازی یا نامعینی که سیستم نامی حلقه بسته پایدار را ناپایدار نمی کند.
- اندازه خطای مدلسازی یا نامعینی سیستم در هر فرکانس با حداکثر مقدار استثنایی در آن فرکانس داده می شود.
- تحلیل محافظه کارانه؟

- **نامعینی جمعی**

$$G_t = G + A$$




در صورت پایداری سیستم حلقه بسته نامی:

$$\det\left(I + GK(j\omega)\right) \neq 0 \qquad \forall\omega$$

اگر نامعینی سیستم حلقه بسته را در فرکانسی ناپایدار کند:

$$0 = \det\left(I + GK(j\omega_0) + AK(j\omega_0)\right)$$

$$= \det\left(I + AK\left(I + GK\right)^{-1}(j\omega_0)\right)\left(I + GK(j\omega_0)\right)$$

$$= \det\left(I + AK\left(I + GK\right)^{-1}(j\omega_0)\right)\det\left(I + GK(j\omega_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \det\left(I + AK\left(I + GK\right)^{-1}(j\omega_0)\right) = 0$$

برای پایداری سیستم حلقه بسته، این شرط نباید برآورده گردد. و در صورتی که ناتساوی زیر برقرار باشد، این حالت رخ نخواهد داد:

$$\bar{\sigma}\left(AK\left(I + GK\right)^{-1}(j\omega)\right) < 1 \quad \forall\omega$$

یک مساله: ماتریس نامعینی نامعلوم است!

راه حل: ناتساوی داده شده از ناتساوی زیر نتیجه می شود:

$$\bar{\sigma}\left(A(j\omega)\right) < \frac{1}{\bar{\sigma}\left(K\left(I+GK\right)^{-1}(j\omega)\right)} \quad \forall \omega$$

**قضیه** سیستم حلقه بسته داده شده با ماتریس های تابع تبدیل گویا پایدار داخلی است اگر:

۱. سیستم حلقه بسته نامی پایدار داخلی است.

۲. ماتریس تابع تبدیل گویای خطا به گونه ای است که:

$G$, and $G+A$ have the same number of RHP poles

۳. مدل خطا، کران زیر را برآورده می سازد:

$$\bar{\sigma}\left(A(s)\right) < \frac{1}{\bar{\sigma}\left(K\left(I+GK\right)^{-1}(s)\right)} \quad \forall s \in D_R$$

- **نامعینی خروجی ضربی**

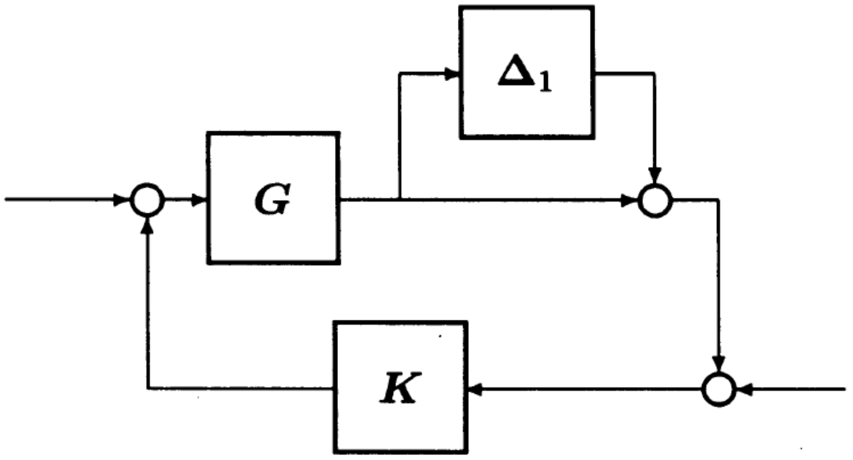
توجه کنید که:

$$(G+A)K = GK + AK \neq GK + A$$

$$\left((I+\Delta_1)G\right)K = (I+\Delta_1)GK$$

$$\left((I-\Delta_2)^{-1}G\right)K = (I-\Delta_2)^{-1}GK$$

$$G_t = \left(I + \Delta_1\right)G$$



**قضیه** سیستم حلقه بسته داده شده با ماتریس های تابع تبدیل گویا پایدار داخلی است اگر:

۱. سیستم حلقه بسته نامی پایدار داخلی است.

۲. مدل خطا به گونه ای است که:

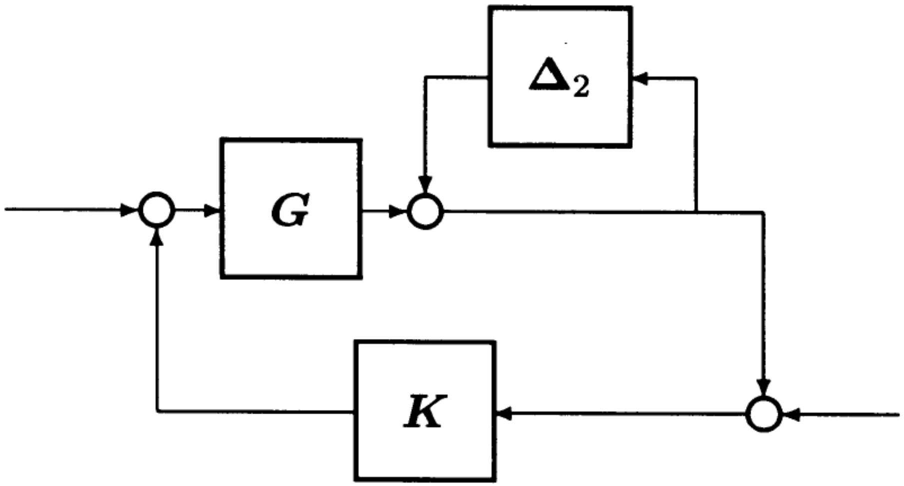
$G$, and $(I + \Delta_1)G$ have the same number of RHP poles

۳. مدل خطا، کران زیر را برآورده می سازد:

$$\bar{\sigma}\left(\Delta_1(s)\right) < \frac{1}{\bar{\sigma}\left(GK\left(I + GK\right)^{-1}(s)\right)} \quad \forall s \in D_R$$

- نامعینی خروجی ضربی معکوس

$$G_t = \left(I - \Delta_2\right)^{-1} G$$



**قضیه** سیستم حلقه بسته داده شده با ماتریس های تابع تبدیل گویا پایدار داخلی است اگر:

۱. سیستم حلقه بسته نامی پایدار داخلی است.

۲. مدل خطا به گونه ای است که:

$G$, and $(I-\Delta_2)^{-1}G$ have the same number of RHP poles

۳. مدل خطا، کران زیر را برآورده می سازد:

$$\bar{\sigma}\left(\Delta_2(s)\right) < \min\left\{1, \underline{\sigma}\left(\left(I+GK\right)(s)\right)\right\} \quad \forall s \in D_R$$

$$\underline{\sigma}\left(\left(I+GK\right)(s)\right) = \frac{1}{\bar{\sigma}\left(S(s)\right)}$$

**Example 2.4.1.** Consider the feedback loop shown in Figure 2.1 with $\boldsymbol{K} = -I$ and

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$$

as in Example 2.1.1.

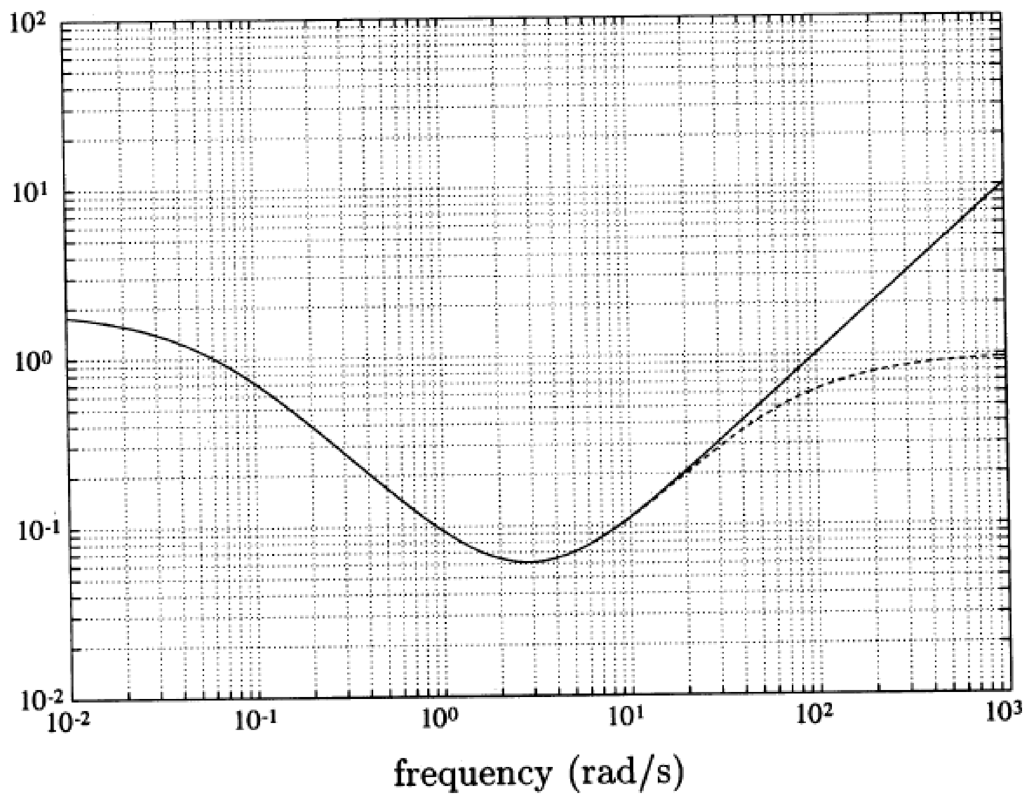



Figure 2.11: Singular value plots of $1/\overline{\sigma}(\boldsymbol{GKS}(j\omega))$ (solid) and $1/\overline{\sigma}(\boldsymbol{KS}(j\omega))$ (dashed).

Figure 2.11 shows singular value plots indicating the robust stability margins for multiplicative (solid) and additive (dashed) perturbations. At 3 $rad/s$, these curves drop down to a minimum value of 0.0612, indicating that a multiplicative or additive perturbation of infinity norm 0.0612 could destabilize the loop.

To show that this system can be destabilized by a stable rational additive perturbation with $\overline{\sigma}(\boldsymbol{A}(j\omega)) \leq 0.0612$ for all real $\omega$, we will construct such an additive perturbation. Using the singular value decomposition of $\boldsymbol{K}(I - \boldsymbol{GK})^{-1}(j3)$, we obtain the perturbation

$$\boldsymbol{A} = 0.0612 \begin{bmatrix} 0.6886 \\ -0.7252\left(\frac{s-0.0509}{s+0.0509}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7851\left(\frac{s-0.0341}{s+0.0341}\right) \\ -0.6194\left(\frac{s-0.0864}{s+0.0864}\right) \end{bmatrix}'$$

using the techniques described in the proof of Theorem 2.4.3; the details are requested in the exercises.

It can be seen that $\boldsymbol{A}$ is stable, that $\overline{\sigma}(\boldsymbol{A}(j\omega)) = 0.0612$ and that $\boldsymbol{A}$ it is destabilizing. The destabilization property follows from the fact that

$$I - \boldsymbol{AK}(I - \boldsymbol{GK})^{-1}(j3)$$

is singular. This means that the closed-loop system will have imaginary-axis poles at $\pm j3$.

The important point is that the singular values of closed-loop operators such as $\boldsymbol{K}(I - \boldsymbol{GK})^{-1}$ and $\boldsymbol{GK}(I - \boldsymbol{GK})^{-1}$ give information about the ability of the loop to tolerate modelling errors.

If we designed an optimally robust controller ignoring all other possible requirements, the solution would simply be $\boldsymbol{K} \equiv 0$! $\nabla$

- **حاشیه پایداری بر اساس نظریه نایکوئیست**

  - ایده حاشیه پایداری مقاوم نایکوئیست

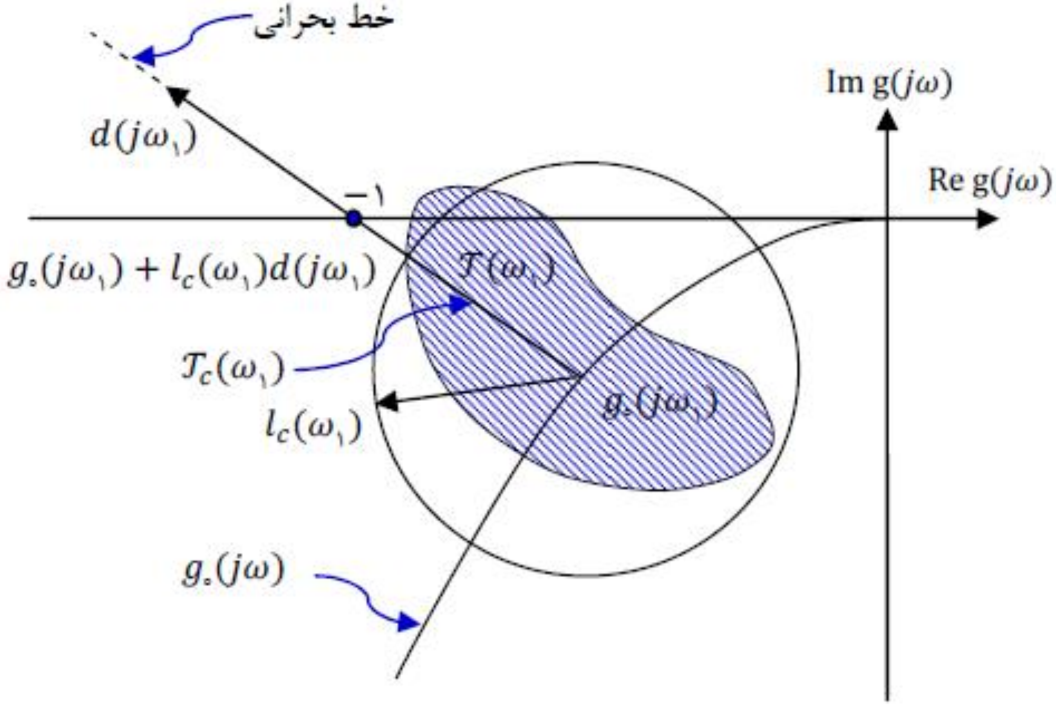
$$g(s) = g_o(s) + \delta(s) \qquad \delta(s) \in d$$

  - نگاره نامعینی

$$\delta(s) = g(s, p) - g(s, p^o)$$

  - سیستم نامی پایدار
  - نامعینی قطب ناپایدار اضافه نمی کند

• چند تعریف



خط بحرانی
Im g($j\omega$)
Re g($j\omega$)
$d(j\omega_1)$
$-1$
$g_0(j\omega_1) + l_c(\omega_1)d(j\omega_1)$
$\mathcal{T}(\omega_1)$
$\mathcal{T}_c(\omega_1)$
$l_c(\omega_1)$
$g_0(j\omega_1)$
$g_0(j\omega)$

قضیه ۶-۴   سیستم نامی $g_\circ(s)$ با نامعینی $\delta(s) \in d$ را در نظر بگیرید. سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی پایدار خواهد بود اگر و فقط اگر

$$\frac{l_c(\omega)}{\left|1 + g_\circ(j\omega)\right|} < 1 \qquad \forall\omega \tag{۶-۴-۷}$$

با تعریف

$$k_N(\omega) \triangleq \frac{l_c(\omega)}{\left|1 + g_\circ(j\omega)\right|} \tag{۶-۴-۸}$$

به عنوان حاشیه *پایداری مقاوم نایکوئیست*[1] برای سیستم‌های یک ورودی یک خروجی از قضیه ۶-۴ داریم که شرط لازم و کافی پایداری مقاوم عبارت است از

$$k_N(\omega) < 1 \qquad \forall\omega \tag{۶-۴-۹}$$

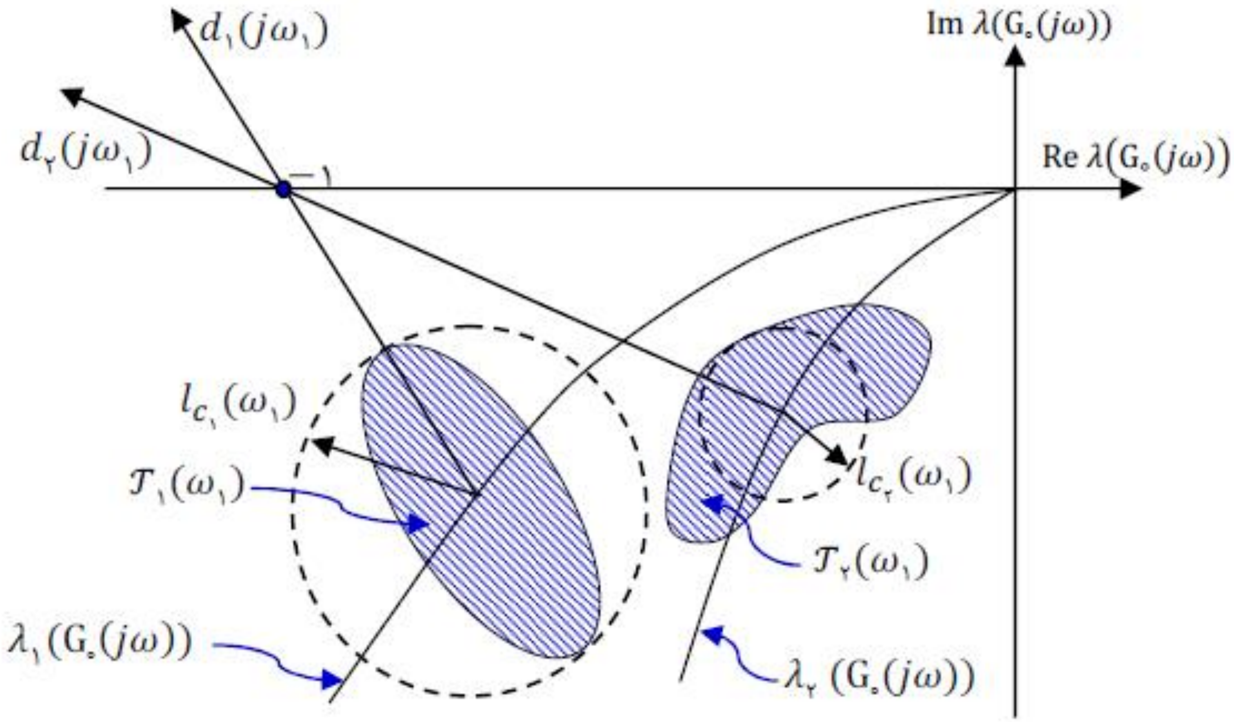
و $\gamma = 1/k_N(\omega)$ مقداری است که اگر نگاره نامعینی تغییر کند (افزایش یا کاهش یابد)، سیستم حلقه بسته به مرز ناپایداری می‌رسد.

- تعمیم ایده به سیستم های چند متغیره

$$G(s) = G_o(s) + \Delta(s) \qquad \Delta(s) \in D$$

- سیستم نامی پایدار
- نامعینی قطب ناپایدار اضافه نمی کند

• چند تعریف



$d_1(j\omega_1)$
$d_2(j\omega_1)$
$-1$
$\mathrm{Im}\ \lambda(G_o(j\omega))$
$\mathrm{Re}\ \lambda(G_o(j\omega))$
$l_{c_1}(\omega_1)$
$\mathcal{T}_1(\omega_1)$
$l_{c_2}(\omega_1)$
$\mathcal{T}_2(\omega_1)$
$\lambda_1(G_o(j\omega))$
$\lambda_2(G_o(j\omega))$

قضیه ۶-۵ ماتریس تابع تبدیل نامی $G_0(s)$ با نامعینی $\Delta(s) \in D$ را در نظر بگیرید. سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی پایدار است اگر و فقط اگر

$$\max_{i=1,2,\dots,n} \frac{l_{ci}(\omega)}{\left|1+\lambda_i\left(G_0(j\omega)\right)\right|} = \frac{l_c(\omega)}{\left|1+\lambda_c\left(G_0(j\omega)\right)\right|} < 1 \qquad \forall\omega \qquad (۱۵-۴-۶)$$

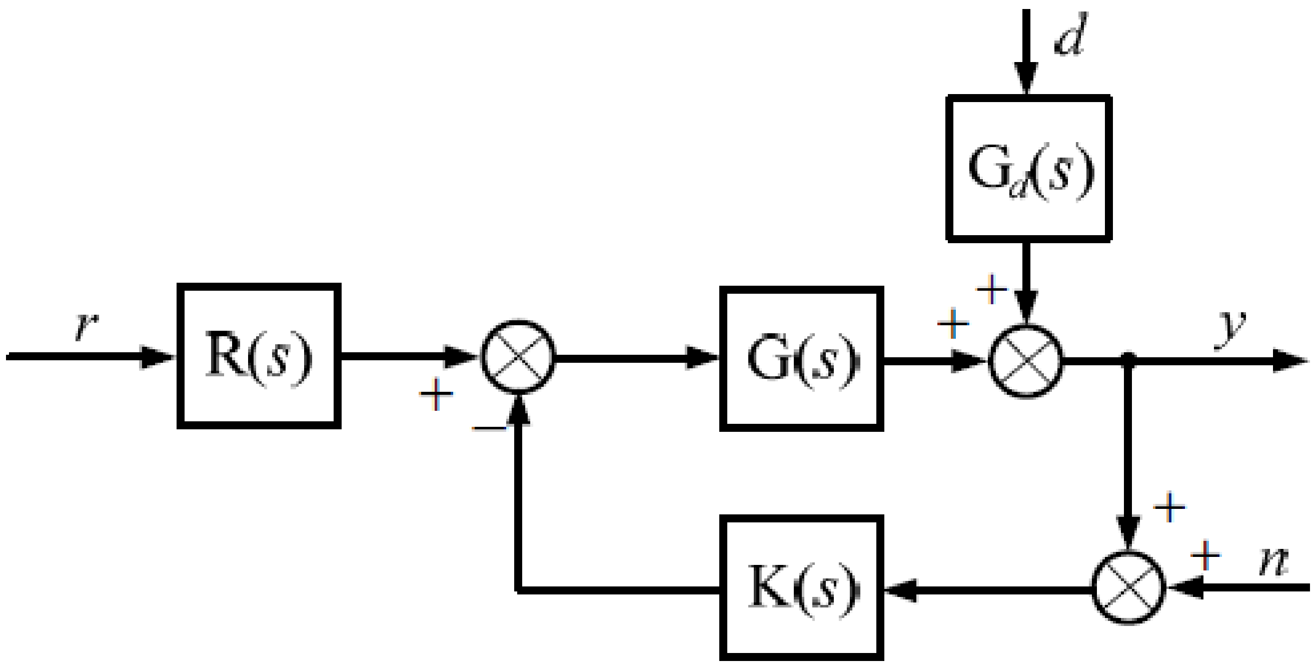
که در آن $l_c(\cdot)$ و $\lambda_c(\cdot)$ به ترتیب شعاع آشفتگی بحرانی و مقدار ویژه متناظر با مکان ویژه[۳] به دست آمده از ماکزیمم‌سازی روی تمام $i = 1,2,\dots,n$ در (۶-۴-۱۵) هستند.

- تحلیل عملکرد سیستم های چندمتغیره

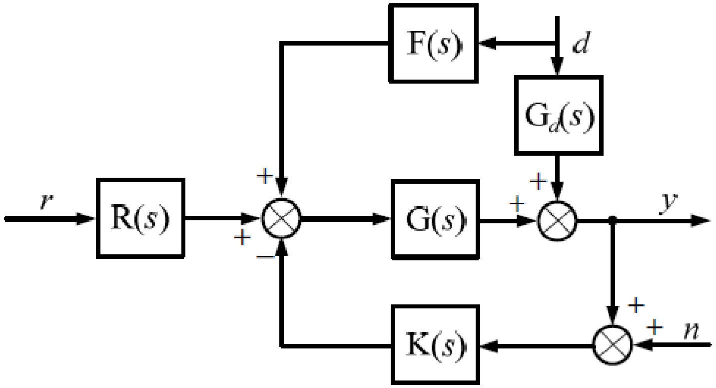
طراحی سیستم‌های کنترل دو هدف کلیدی پایدارسازی و بهبود عملکرد[۱] حلقه بسته دارند. در صورتی که سیستم حلقه باز پایدار باشد، هدف اصلی طراحی سیستم کنترل بهبود عملکرد خواهد بود. عملکرد سیستم مجموعه رفتارهای سیستم است که می‌توان آن‌ها را در محورهای زیر جمع‌بندی کرد:

- تضعیف اثر اغتشاش بر پاسخ حلقه بسته.
- کاهش حساسیت.
- ردیابی ورودی‌های مرجع.
- تضعیف اثر خطاهای اندازه‌گیری بر پاسخ حلقه بسته.

- سیستم حلقه بسته



- تضعیف اثر اغتشاش بر پاسخ حلقه بسته




برای سیستم حلقه بسته داده شده داریم

$$Y(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}[G_d(s) + G(s)F(s)]D(s)$$

با تعریف ماتریس حساسیت به صورت

$$S(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}$$

در می‌یابیم که ماتریس حساسیت نقش کلیدی در تضعیف اغتشاش دارد. در واقع کوچک کردن اندازه $S(s)$ نقشی اساسی در تضعیف اثر اغتشاش خواهد داشت. به ویژه اگر

$$\overline{\sigma}[S(j\omega)[G_d(j\omega) + G(j\omega)F(j\omega)]] \leq \gamma \qquad (۱-۵-۶)$$

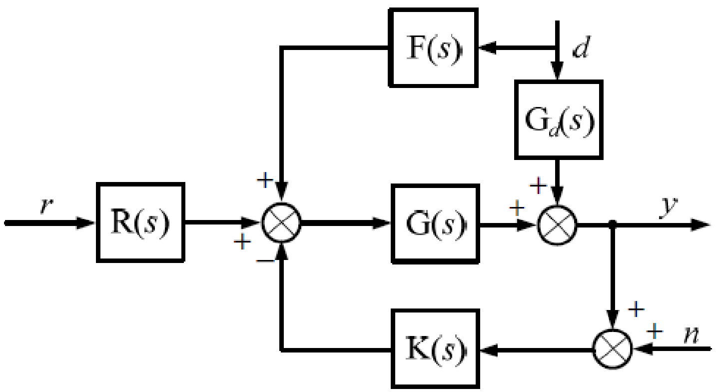
خواهیم داشت که

$$\|Y(j\omega)\| \leq \gamma\|D(j\omega)\|$$

با استفاده از ناتساوی‌های مقدار استثنایی، می‌توان نشان داد که با فرض $\gamma < ۱$، از [4]

$$\underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\overline{\sigma}[G_d(j\omega) + G(j\omega)F(j\omega)]}{\gamma} + ۱$$

## • ردیابی ورودی مرجع




با تعریف $E(s) = R(s) - Y(s)$ به عنوان خطای ردیابی، هدف طراحی سیستم‌های کنترل ردیاب صفر کردن خطای ردیابی است. نخست تابع تبدیل از ورودی مرجع $R(s)$ به خطای ردیابی $E(s)$ را به‌دست می‌آوریم. داریم

$$E(s) = S(s)\left[I + G(s)\big(K(s) + P(s)\big)\right]R(s)$$

که در آن $S(s)$ ماتریس حساسیت سیستم است. توجه کنید اگر

$$\overline{\sigma}\left[S(j\omega)[I + G(j\omega)(K(j\omega) + P(j\omega))]\right] \leq \gamma \qquad (۲-۵-۶)$$

آن‌گاه

$$\|E(j\omega)\| \leq \gamma \|R(j\omega)\|$$

خواهد بود و شرط ردیابی با کوچک‌تر کردن $\gamma$ برآورده خواهد شد.

با جبر دیاگرام بلوکی می‌توان نشان داد که حالت فیدبک منفی واحد متناظر با $P(s) = -K(s)$ است و در این حالت ناتساوی (۶-۵-۲) به صورت زیر ساده می‌شود

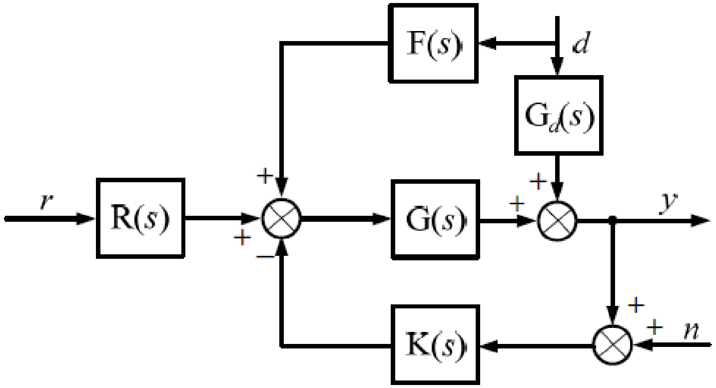
$$\overline{\sigma}[S(j\omega)] \leq \gamma$$

که معیار عملکردی را به صورت حداقل‌سازی بزرگترین مقدار استثنایی ماتریس حساسیت سیستم نشان می‌دهد. از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که از ناتساوی زیر

$$\underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{\overline{\sigma}[I + G(j\omega)(K(j\omega) + P(j\omega))]}{\gamma} + ۱$$

برقراری ناتساوی (۶-۵-۲) را خواهیم داشت [4]. لذا، ردیابی خوب، یا به عبارت دیگر $\gamma \ll ۱$، با بزرگ کردن حداقل بهره حلقه $\underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)]$، به دست می‌آید.

- تضعیف اثر خطاهای اندازه گیری پاسخ حلقه بسته




$$Y(s) = G(s)K(s)S(s)N(s)$$

و لذا اگر

$$\overline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)] \le \gamma \qquad (۳-۵-۶)$$

باشد، داریم

$$\|Y(j\omega)\| \le \gamma \|N(j\omega)\|$$

و با کوچک‌تر کردن $\gamma$، اثر خطاها بر خروجی حلقه بسته کمتر خواهد بود.

اکنون توجه کنید که

$$S(s) + G(s)K(s)S(s) = [I + G(s)K(s)]S(s) = I$$

و لذا ماتریس حساسیت و ماتریس مکمل حساسیت[۱] $G(s)K(s)S(s)$ با هم رابطه جبری دارند و کوچک کردن هر دوی آن‌ها به طور همزمان ممکن نیست. در واقع داریم

$$\underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)] > ۱ - \overline{\sigma}(S(j\omega))$$

و لذا

$$\|Y(j\omega)\| > \left[۱ - \overline{\sigma}(S(j\omega))\right] \|N(j\omega)\|$$

و به سادگی مشاهده می‌شود که کوچکتر کردن $\overline{\sigma}(S(j\omega))$ (همانند آن‌چه در بخش‌های (۶-۵-۱) و (۶-۵-۲) داشتیم) به عبور خطاهای مدل‌سازی با تضعیف کمتر منجر می‌گردد.

از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که از ناتساوی زیر [4]

$$\overline{\sigma}[G(s)K(s)] \le \frac{\gamma}{۱ + \gamma}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\overline{\sigma}[G(s)K(s)G(s)] \le \gamma$$

- عملکرد مقاوم